CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES (ETS INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE SEVILLA)

LibreTexts™

Cálculo en Varias Variables (ETS Ingeniería de la Universidad de Sevilla)

This text is disseminated via the Open Education Resource (OER) LibreTexts Project (https://LibreTexts.org) and like the hundreds of other texts available within this powerful platform, it is freely available for reading, printing and "consuming." Most, but not all, pages in the library have licenses that may allow individuals to make changes, save, and print this book. Carefully consult the applicable license(s) before pursuing such effects.

Instructors can adopt existing LibreTexts texts or Remix them to quickly build course-specific resources to meet the needs of their students. Unlike traditional textbooks, LibreTexts' web based origins allow powerful integration of advanced features and new technologies to support learning.

The LibreTexts mission is to unite students, faculty and scholars in a cooperative effort to develop an easy-to-use online platform for the construction, customization, and dissemination of OER content to reduce the burdens of unreasonable textbook costs to our students and society. The LibreTexts project is a multi-institutional collaborative venture to develop the next generation of open-access texts to improve postsecondary education at all levels of higher learning by developing an Open Access Resource environment. The project currently consists of 14 independently operating and interconnected libraries that are constantly being optimized by students, faculty, and outside experts to supplant conventional paper-based books. These free textbook alternatives are organized within a central environment that is both vertically (from advance to basic level) and horizontally (across different fields) integrated.

The LibreTexts libraries are Powered by NICE CXOne and are supported by the Department of Education Open Textbook Pilot Project, the UC Davis Office of the Provost, the UC Davis Library, the California State University Affordable Learning Solutions Program, and Merlot. This material is based upon work supported by the National Science Foundation under Grant No. 1246120, 1525057, and 1413739.

Any opinions, findings, and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the author(s) and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation nor the US Department of Education.

Have questions or comments? For information about adoptions or adaptions contact info@LibreTexts.org. More information on our activities can be found via Facebook (https://facebook.com/Libretexts), Twitter (https://twitter.com/libretexts), or our blog (http://Blog.Libretexts.org).

This text was compiled on 03/22/2025

TABLE OF CONTENTS

Licensing

1. DERIVADAS PARCIALES

- 1.1. Campos escalares
- 1.2. Gráfica de un campo escalar
- 1.3. Derivadas parciales
- 1.4. Campos escalares diferenciables
- 1.5. La regla de la cadena
- 1.6. Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente
- 1.7. El teorema de Taylor

2. ECUACIONES IMPLÍCITAS

- 2.1. Curvas definidas implícitamente en el plano
- 2.2. Superficies definidas implícitamente en el espacio
- 2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio

6. INTEGRALES DE LÍNEA

- 6.1 Integrales de Línea
- 6.2 Campos Conservativos

Apéndice

Index

Glossary

Detailed Licensing

Licensing

*A detailed breakdown of this resource's licensing can be found in **Back Matter/Detailed Licensing**.*

1. DERIVADAS PARCIALES

Este **CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES** recoge el contenido de la asignatura cuatrimestral *Matemáticas III* que se imparte en el primer curso del Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales de la Universidad de Sevilla (España) y está dedicado a estudiar el cálculo diferencial e integral de los campos escalares y de los campos vectoriales. Los campos escalares son funciones que dependen de dos o más variables cuyos valores son números reales y se utilizan para representar las magnitudes escalares (longitud, área, volumen, distancia, presión, temperatura, densidad, voltaje, resistencia, etc.) que aparecen en los modelos más comunes en la ingeniería. Los campos vectoriales son funciones que dependen de dos o más variables cuyos valores son vectores y se utilizan para representar las magnitudes vectoriales (posición, velocidad, aceleración, fuerza, etc.) que también aparecen en los modelos de la ingeniería.

El objetivo principal de este primer capítulo **1. DERIVADAS PARCIALES** es explicar cómo se extiende el concepto de derivada de una función de una variable a campos escalares de varias variables y algunas de sus propiedades analíticas y geométricas. Empezamos con la sección **1.1. Campos escalares**, dedicada a definir y presentar ejemplos de campos escalares, junto con las nociones intuitivas de dominio, límite y continuidad. En la sección **1.2. Gráfica de un campo escalar** definimos el concepto de gráfica de un campo escalar de dos variables $f(x,y)$ y su visualización como la superficie de ecuación $z=f(x,y)$, así como la representación alternativa de un campo escalar mediante sus curvas de nivel. En la sección **1.3. Derivadas parciales** se introducen las derivadas parciales, que son las que se obtienen derivando una función de varias variables con respecto a una de ellas cuando se dejan las demás constantes y se estudia su interpretación geométrica, cómo se calculan y se introducen las derivadas parciales segundas, terceras, etc. El concepto de derivada de una función $f'(x)$ surge como solución del problema de trazar la recta tangente a la curva de ecuación $y=f(x)$ en un punto. Para un campo de dos variables $f(x,y)$ nos plantearemos en la sección **1.4. Campos escalares diferenciables** el problema de hallar el plano tangente a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ en un punto de dicha superficie y veremos que de dicho planteamiento surge, de manera natural y por analogía con la definición de derivada, la noción de gradiente o diferencial de un campo escalar de dos variables. En esta analogía desempeñan un papel fundamental las derivadas parciales. En la sección **1.5. La regla de la cadena** estudiaremos con detalle, por su importancia teórica y práctica, las fórmulas para el cálculo de derivadas parciales cuando se hace un cambio de variables y veremos algunas consecuencias en la sección **1.6. Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente**. Finalmente, en la sección **1.7 El teorema de Taylor** veremos cómo aproximar los valores de un campo escalar mediante la evaluación de un polinomio que, en el caso particular del polinomio de Taylor de grado 2, usaremos más adelante para saber si los puntos críticos de un campo escalar, los puntos donde su derivada vale cero, son máximos o mínimos locales.

Aquí puedes enlazar directamente con el contenido de las secciones.

Campos escalares

Gráfica de un campo escalar

Derivadas parciales

Campos escalares diferenciables

La regla de la cadena

Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente

El teorema de Taylor

Breves notas históricas

Las primeras funciones de dos variables que aparecen son las ecuaciones implícitas que definen curvas en el plano utilizadas por René Descartes y hay algunas trazas del empleo de derivadas parciales por parte de Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz y sus seguidores a finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. A lo largo de este siglo se plantean problemas con funciones que dependen de varias variables, como el problema de la cuerda vibrante: hallar, en función de su abscisa x y el tiempo t, la ordenada $y(x,t)$ de cada punto (x,y) de una cuerda que vibra en un plano.

Fue Nicholas Bernoulli quien, estudiando en 1716 el problema de las trayectorias ortogonales a una familia de curvas, definió específicamente el concepto básico de derivada parcial para funciones que dependen de varias variables y la noción de diferencial y fue, asimismo, el primero en indicar, en 1721, el hecho de que las derivadas parciales cruzadas son iguales. La primera demostración rigurosa de la igualdad de las derivadas cruzadas, bajo las condiciones adecuadas que hemos visto, fue dada por Hermann A. Schwarz en 1873.

A partir de los trabajos de Nicholas Bernoulli, Leonhard Euler y el grupo de matemáticos franceses del siglo XVIII, Alexis Clairaut, Alexis Fontaine y Joseph Louis Lagrange aplicaron las nociones de derivada parcial, derivada direccional, plano tangente, etc., en la resolución de varios problemas, como iremos viendo a lo largo de esta asignatura. Será a lo largo del siglo XIX cuando se establezcan los fundamentos y resultados principales del cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables; resultados que se obtuvieron, en su mayor parte, en el contexto del desarrollo de la física, especialmente del electromagnetismo, y están asociados a los nombres de Carl F. Gauss, George Green, Augustin L. Cauchy (a quien se debe la extensión del teorema de Taylor a los campos escalares obtenida en 1829), Mijail Ostrogradski, Bernhard Riemann, William R. Hamilton, y Carl G. Jacobi, Otto Hesse (que introdujo la noción de matriz hessiana de un campo escalar en 1857) y, ya a principios del siglo XX, William H. Young y Henri Lebesgue.

Sin embargo, el concepto de qué es una función diferenciable no fue formulado con claridad hasta bien entrado el siglo XIX; parece haber sido el matemático alemán Carl J. Thomae el primero en cuestionar, en 1873, si para una función de dos variables puede decirse legítimamente que es diferenciable cuando simplemente existen sus derivadas parciales. Fueron matemáticos de finales de ese siglo quienes, poco a poco, lograron cristalizar el concepto de diferenciabilidad aclarando la necesidad e importancia de la hipótesis de que las derivadas parciales sean continuas. La primera definición de función diferenciable como la que hemos visto, parece haber sido dada por el matemático alemán Otto Stolz en 1887. Trabajos posteriores, ya a comienzos del siglo XX, de James Pierpoint y William H. Young, en los que aparece por primera vez la continuidad de las derivadas parciales como condición suficiente para la diferenciabilidad, y Maurice Fréchet llevan a éste último a definir en 1911 la noción de función diferenciable en espacios generales que se usa hoy en día.

La extensión a conjuntos generales de la noción de punto interior o punto de la frontera dio lugar, tras los trabajos pioneros de Georg Cantor a finales del siglo XIXy, sobre todo, el de Felix Hausdorff en 1914, a la rama de las matemáticas conocida como topología (el "estudio de los lugares").

---

1. DERIVADAS PARCIALES is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

1.1. Campos escalares

Introducción

Los campos escalares son funciones que dependen de dos o más variables cuyos valores son números reales. Los campos vectoriales son funciones que dependen de dos o más variables y cuyos valores son vectores; veamos algunos ejemplos simples.

1. La función $a(x,y)=xy$ es el campo escalar de dos variables que nos proporciona el área del rectángulo de lados x e y.
2. La función $r(x,y)=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ es el campo escalar de dos variables que expresa la distancia desde el punto (x,y) hasta el origen de coordenadas o, en otras palabras, el radio polar r del punto (x,y).
3. La función $\rho(x,y,z)=\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es el campo escalar de tres variables que expresa la distancia desde el punto (x,y,z) hasta el origen de coordenadas. (Con objeto de no generar confusión con las notaciones habituales para las coordenadas cilíndricas y esféricas que estudiaremos más adelante, mantendremos la diferencia entre la notación r en 2D y ρ en 3D para la distancia de un punto al origen).
4. La función $\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)=x\,\vec{\mathbf{i}}+y\,\vec{\mathbf{j}}+z\,\vec{\mathbf{k}}$ es el campo vectorial que a cada punto (x,y,z) le asigna su vector de posición. En particular, el campo $\rho(x,y,z)$ del ejemplo anterior es el módulo (o norma) de $\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)$, es decir, $\rho(x,y,z)=\|\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)\|$.
5. Sea $\vec{\mathbf{u}}(x,y,z)=\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)/\|\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)\|$ el vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)$, la función

$$\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=-GMm\frac{\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)}{\|\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)\|^3}=-GMm\frac{\vec{\mathbf{u}}(x,y,z)}{\|\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)\|^2}=-GMm\frac{\vec{\mathbf{u}}(x,y,z)}{\rho^2(x,y,z)}$$

   es el campo vectorial que expresa la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m situado en el punto (x,y,z), siendo M la masa de la Tierra (en cuyo centro se sitúa el origen de coordenadas) y G la constante de gravitación universal de Newton.

En las aplicaciones a la geometría, la física y otras ciencias, los campos escalares son funciones que representan valores de magnitudes escalares como la longitud, el área, el volumen, la densidad, la masa, la energía o el trabajo desarrollado por una fuerza. Los campos vectoriales son funciones que representan magnitudes vectoriales como la posición, la velocidad, la aceleración o la fuerza.

Campos escalares

Un **campo escalar de dos variables** es una función f que asigna a cada punto (x,y) de un conjunto U del plano $\mathbb{R}^2$ un número real $f(x,y)$, lo que se suele indicar como $f\colon (x,y)\in U\to f(x,y)\in\mathbb{R}$. El conjunto U se llama **dominio de definición** de f.

Un **campo escalar de tres variables** es una función f que asigna a cada punto (x,y,z) de su dominio de definición U en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ un número real $f(x,y,z)$, lo que se suele indicar como $f\colon (x,y,z)\in U\to f(x,y,z)\in\mathbb{R}$.

Algunas observaciones sobre la notación. (1) En ocasiones los campos escalares vienen dados en función de la posición, por lo que a veces se usa una notación vectorial en la que se identifica un punto con su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}=(x,y)=x\,\vec{\mathbf{i}}+y\,\vec{\mathbf{j}}$ (o bien $\vec{\mathbf{r}}=(x,y,z)=x\,\vec{\mathbf{i}}+y\,\vec{\mathbf{j}}+z\,\vec{\mathbf{k}}$ en el caso tridimensional) y los campos escalares son funciones que asignan a cada $\vec{\mathbf{r}}$ un valor real $f(\vec{\mathbf{r}})$.

(2) Es habitual escribir los vectores en columna, $\vec{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. Sin embargo, mientras no haya posibilidad de confusión, mantendremos por comodidad la notación como vectores-fila. Así, para indicar el valor de un campo escalar f en un punto $A=\vec{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, escribiremos $f(A)$, $f(\vec{\mathbf{r}})$ o $f(x,y)$, pero no $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$. No obstante, en algunos casos especiales sí será importante distinguir entre vectores-fila y vectores-columna, lo que se indicará oportunamente.

(3) En general, usaremos los campos de dos variables para justificar las definiciones y obtener interpretaciones geométricas que se pueden visualizar solo con dos variables, pero enunciaremos los principales resultados para campos de tres variables, que es el contexto natural de aplicación de los resultados. Por tanto, casi todo lo que digamos valdrá para campos de dos variables, sin más que suprimir la tercera coordenada o la variable z, y puede extenderse de manera natural a campos que dependen de cuatro o más variables

$$f\colon (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in U\subset\mathbb{R}^n\to f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}.$$

Por descontado, cuando exista alguna diferencia notable entre los casos 2D y 3D, (por ejemplo, en la noción de rotacional), la especificaremos con detalle.

Polinomios

Los campos escalares más simples son los polinomios. Un **monomio de dos variables** x e y es un producto de la forma ax^my^n, donde m y n son números enteros no negativos y a es un coeficiente escalar; el **grado del monomio** es la suma $m+n$ de los exponentes de las variables. Por ejemplo, el área de un rectángulo $a(x,y)=xy$ es un monomio de grado 2 con dos variables. Si tenemos un cilindro circular recto de altura h y radio de la base r, su volumen $v(r,h)=\pi r^2h$ es un monomio de grado 3 con dos variables.

Para tres variables, un monomio es un producto de la forma $ax^my^nz^p$; el grado del monomio es la suma $m+n+p$ de los exponentes de las variables. El volumen $v(x,y,z)=xyz$ de un ortoedro de lados x,y,z, es un monomio de grado 3 con tres variables.

Un **polinomio** es una suma de monomios y el **grado del polinomio** es el mayor de los grados de los monomios que lo componen; veamos algunos ejemplos.

1. Los polinomios de grado 0 son las funciones constantes.
2. El campo escalar $f(x,y)=ax+by$ es un polinomio de grado 1. Si usamos $\vec{\mathbf{r}}=x\,\vec{\mathbf{i}}+y\,\vec{\mathbf{j}}$ y tomamos el vector constante $\vec{\mathbf{c}}=a\,\vec{\mathbf{i}}+b\,\vec{\mathbf{j}}$, entonces f se puede representar mediante el producto escalar $f(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$, de manera que, con la terminología del álgebra lineal, f es la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ generada por el vector $\vec{\mathbf{c}}$ entendido como una matriz fila (análogamente en dimensión 3).
3. El campo $f(x,y)=ax^2+bxy+cx^2$ es un polinomio de grado 2 que podemos escribir
$$f(x,y)=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$
que, de nuevo en el lenguaje del álgebra lineal, es la forma cuadrática generada por la matriz simétrica $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{bmatrix}$ y que se puede escribir como $f(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{r}}^{\,T}\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{r}}$.
4. Análogamente, la forma cuadrática $f(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{r}}^{\,T}\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{r}}$ generada en $\mathbb{R}^3$ por una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de dimensión 3 es un polinomio de grado 2 en tres variables. Por ejemplo, la función $\rho^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, que proporciona el cuadrado de la distancia desde el punto (x,y,z) hasta el origen de coordenadas, es un polinomio de grado 2 con tres variables que es la forma cuadrática generada en $\mathbb{R}^3$ por la matriz identidad. Será necesario tener un buen conocimiento de las formas cuadráticas para abordar la caracterización de los puntos críticos de un campo escalar que veremos más adelante.
5. El campo $f(x,y)=3x^3y^2-xy^4+3xy-2$ es un polinomio de grado 5 en dos variables.
6. El campo $f(x,y,z)=x^2yz^3+z^2y-3xy-z+2$ es un polinomio de grado 6 en tres variables.

Campos escalares centrales

Se dice que un campo escalar es un **campo central** (o radial, en algunos textos) cuando su valor en un punto depende únicamente de la distancia del punto a un punto fijo de antemano llamado **centro** o (también, en algunos textos, fuente o sumidero). Habitualmente, el centro es el origen de coordenadas, en cuyo caso la distancia desde un punto (x,y,z) al centro es $\rho(x,y,z)=\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, y los campos centrales en $\mathbb{R}^3$ se escriben $f(x,y,z)=\psi\left(\rho(x,y,z)\right)$, donde $\psi(t)$ es una función de clase C^1 en un intervalo del semieje $t\geq 0$. Para el caso 2D, basta con suprimir z, o sea, $f(x,y)=\psi\left(\|(x,y)\|\right)=\psi(r)$ con $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Límites y continuidad de un campo escalar

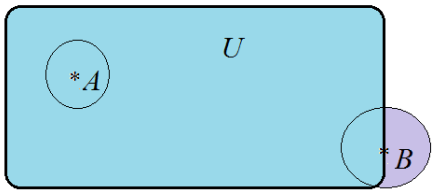
Observaciones. (1) Como en el caso de los campos centrales, casi todos los campos que aparecen en la práctica se obtienen aplicando a un polinomio en varias variables las operaciones habituales -suma, resta, multiplicación y división- y las funciones elementales de una variable (potencias, raíces, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y sus inversas, valor absoluto, etc.). A veces se trabaja también con funciones que proporcionan el máximo o mínimo de un conjunto finito de valores $f(x,y)=\max\{|x|,|y|\}$, por ejemplo). En estos casos tenemos, como regla general, que si un campo escalar de varias variables

viene dado por una o varias fórmulas, entonces su dominio es el conjunto más grande en el que dichas fórmulas tienen sentido. Veamos algunos ejemplos:

1. Los polinomios están definidos en todo $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ según sean de dos o de tres variables.
2. El dominio del campo $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ está formado por los puntos (x,y) del plano que cumplen $x^2+y^2\leq 1$, es decir U es el círculo de centro el origen y radio 1 o círculo unidad.
3. El dominio de la función $f(x,y)=\log(1+x-y)$ está formado por los puntos (x,y) del plano tales que $1+x-y>0$, es decir, es un semiplano.
4. El campo $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ está definida para los puntos (x,y,z) tales que $x^2+y^2+z^2\leq 1$, es decir, su dominio es la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$.
5. La función $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1}$ está definida para los puntos $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, es decir, su dominio es todo $\mathbb{R}^3$ salvo el origen.

(2) La noción de límite es el concepto esencial sobre el que se construye el cálculo de funciones de una variable. El límite de un campo escalar de varias variables es una extensión directa de dicho concepto; en principio, bastaría con sustituir el valor absoluto, que nos da la distancia entre puntos de la recta real, por la norma euclídea que nos da la distancia entre puntos del plano o del espacio. Sin embargo, hay una diferencia notable entre los casos de una y varias variables: en el caso de una variable solamente nos podemos acercar al punto por la izquierda o por la derecha, mientras que en el caso de varias variables nos podemos acercar al punto desde muchas direcciones, por eso, como paso previo a la definición formal de límite de un campo escalar de varias variables, es necesario distinguir algunas situaciones geométricas especiales.

Puntos interiores y puntos de la frontera. Empezando por el caso bidimensional, diremos que A es un **punto interior** de un conjunto $U\subset\mathbb{R}^2$ si hay un círculo centrado en A que se queda totalmente contenido en U. Diremos que B es un **punto de la frontera** de U si en todo círculo centrado en B hay puntos que están en U y puntos que no están en U.



El punto A es un punto interior de U, el punto B está en la frontera de U.

Estos conceptos se trasladan al espacio tridimensional cambiando "círculo" por "esfera". Cuando U es el dominio de definición de un campo escalar, la diferencia esencial es que en un punto interior de U el campo está definido en todo el espacio que lo que rodea y podemos acercarnos a él desde todas las direcciones posibles, mientras que cerca de un punto de la frontera siempre hay una zona del espacio en la que el campo no está definido.

En la gran mayoría de los casos el dominio U viene definido como el conjunto de puntos que cumplen una o varias igualdades o desigualdades. En este caso la frontera de U está formada por los puntos donde se cumple alguna igualdad y sus puntos interiores son los puntos (si hay) donde se cumplen todas las desigualdades estrictamente. Por ejemplo, el círculo unidad está formado por los puntos (x,y) del plano que cumplen $x^2+y^2\leq 1$. Su frontera es la circunferencia unidad $x^2+y^2=1$ (los puntos donde se da la igualdad), mientras que sus puntos interiores son los puntos (x,y) tales que $x^2+y^2<1$ (los puntos donde se da la desigualdad estricta).

Al igual que en este caso, en la mayoría de los casos de interés (rectángulos, círculos, triángulos, semiplanos, esferas, cilindros, conos, cubos, ortoedros, etc.) la frontera coincide con lo que nos dice la intuición geométrica, por lo que no profundizaremos más en estos conceptos.

Límite y continuidad de un campo escalar. Sea U el dominio de definición (en 2D o 3D) de un campo f. Sea A un punto interior de U o bien un punto de la frontera de U al que nos podemos acercar tanto como queramos por puntos X de U distintos de él. Diremos que L es el **límite** de $f(X)$ cuando
X tiende a A, lo que escribimos $\lim_{X\to A} f(X)=L$, cuando los valores de $f(X)$ están tan cercanos a L como queramos en todos los puntos $X\in U$ lo suficientemente cerca de A pero con $X\neq A$.

Diremos que f es **continuo** en A cuando $\lim_{X\to A} f(X) = f(A)$ y se dice que f es un **campo escalar continuo** cuando es continuo en todos los puntos de su dominio de definición.

Puede probarse que las propiedades algebraicas de los límites de campos de varias variables (suma, producto, composición, etc.) son similares a las de los límites de funciones de una variable y, por tanto, lo mismo ocurre con la continuidad. La comprobación teórica de estas propiedades, así como un estudio exhaustivo de la existencia de límites, límites laterales, límites direccionales, etc., basado en la definición formal $\epsilon - \delta$ se aleja de los objetivos de este curso. Lo importante aquí es que, en particular, los polinomios son funciones continuas y la composición de funciones continuas es continua, de forma que (casi) todas las funciones que se utilizan en la práctica son continuas.

Ejercicios

Ejercicio 1. Para cada uno de los siguientes campos escalares, determina su dominio de definición y la frontera de dicho dominio.

(1) $f(x,y) = 3x^2y - x^2 + y$
(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-16}$
(3) $f(x,y) = y/x$
(4) $f(x,y) = \sqrt{(9-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$
(5) $f(x,y) = 2x/(x^2-y^2)$
(6) $f(x,y) =$ el ángulo polar de (x,y)
(7) $f(x,y,z) = \log(4-x+2y+z)$
(8) $f(x,y,z) = 4y - z\sqrt{x^2 z}$

Ejercicio 2. Sean $r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\rho = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ la distancia, respectivamente en 2D y 3D, desde un punto al origen. Halla el dominio de los campos centrales r^n y ρ^n (para $n = \pm 1, \pm 2, \dots$), $\log(r)$ y $\log(\rho)$, donde log indica la función logaritmo neperiano.

***Ejercicio 3.** El campo escalar definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

es un ejemplo de un campo escalar no continuo en el origen. Para comprobarlo, calcula el límite del campo escalar cuando (x,y) se acerca al origen siguiendo la dirección de una línea recta de la forma $y = mx$ y comprueba que el valor del límite depende de la inclinación m.

***Ejercicio 4.** Considera el campo escalar f dado por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Aunque se parece al del ejercicio anterior, esta campo sí es continuo en el origen. Para comprobar este hecho, prueba que $|2xy| \leq x^2+y^2$ (desarrollando la desigualdad $(x-y)^2 \geq 0$) y utiliza esto para acotar f superiormente y deducir que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

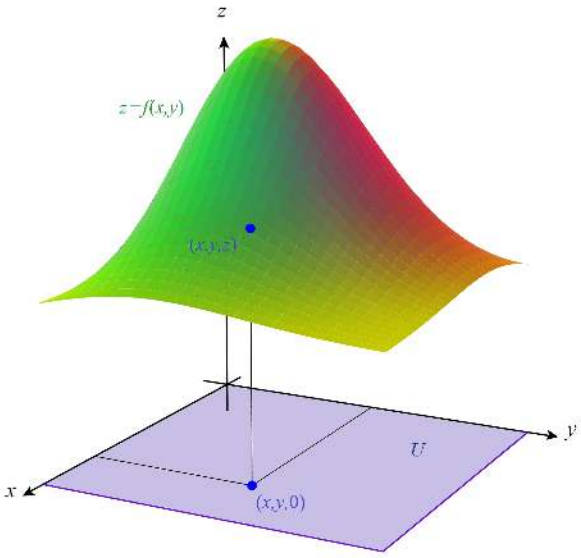
1.1. Campos escalares is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

1.2. Gráfica de un campo escalar

Gráfica de un campo escalar

Como ya sabes, la gráfica es una herramienta esencial para estudiar las funciones de una variable y visualizar su comportamiento. Para campos escalares de dos variables también se da esta conexión entre las propiedades algebraicas de las fórmulas que los definen y las propiedades geométricas de sus gráficas, que son superficies en el espacio.

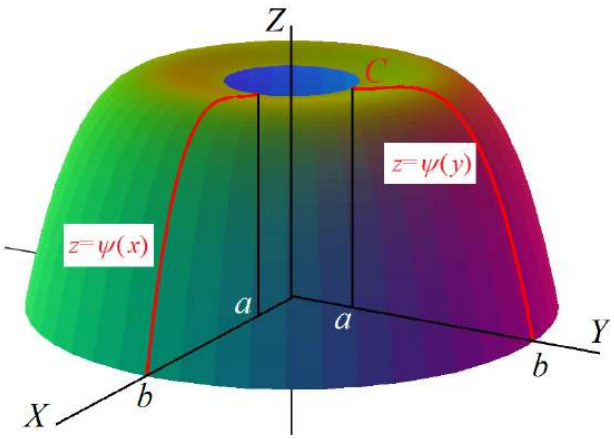
La **gráfica de un campo escalar de dos variables** continuo $f: U \to \mathbb{R}$ es el conjunto del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ dado por $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}$.



Superficie de ecuación $z = f(x, y)$.

Este conjunto puede visualizarse como una superficie en $\mathbb{R}^3$ que se llama **superficie de ecuación** $z = f(x, y)$ porque se construye de la siguiente manera: se coloca el dominio U en el plano del suelo y, situado sobre la vertical de cada punto $(x, y) \in U$, el punto de correspondiente en la gráfica de f es $(x, y, f(x, y))$cuya tercera coordenada es $z = f(x, y)$. No es nada fácil dibujar a mano alzada la gráfica de un campo escalar de dos variables con la salvedad, quizás, de los planos y algunas cuádricas. La versión en español de la aplicación CalcPlot3D es una magnífica herramienta para dibujar superficies del tipo $z = f(x, y)$ (y muchas cosas más que iremos viendo) introducidas desde el teclado.

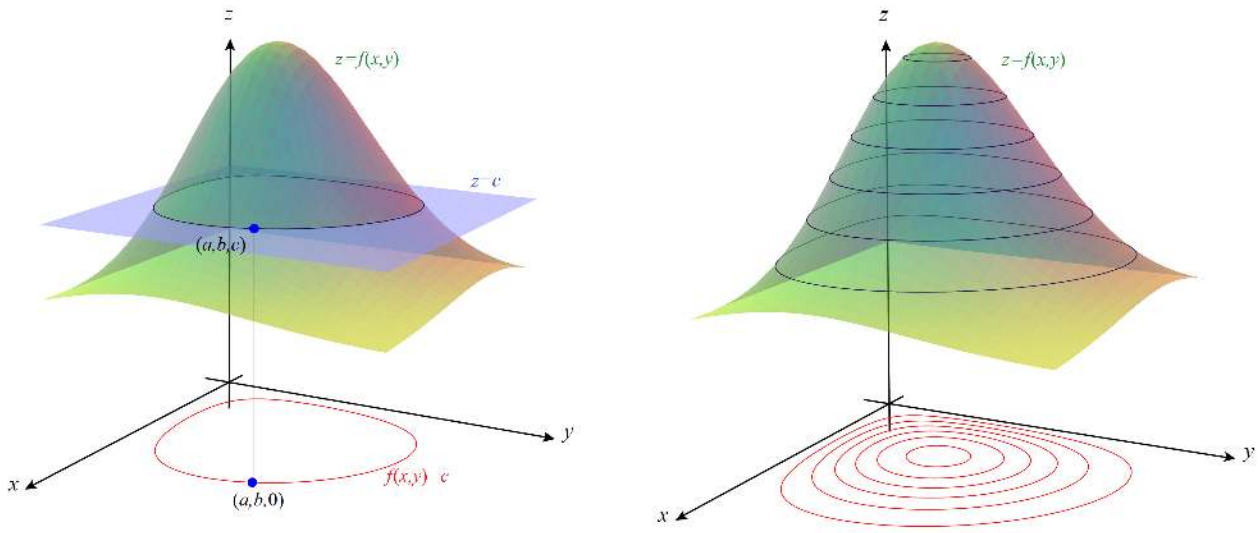
Gráfica de un campo central. Si $f(x, y) = \psi(r)$, con $a \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| \leq b$ es un campo central, su gráfica es una **superficie de revolución** que se obtiene haciendo girar la gráfica C de la función $z = \psi(x)$ en el plano XZ (o la de $z = \psi(y)$ en el plano YZ) alrededor del eje Z. Estudiaremos con más detenimiento las superficies de revolución en el Capítulo ??.



Superficie de revolución alrededor del eje Z.

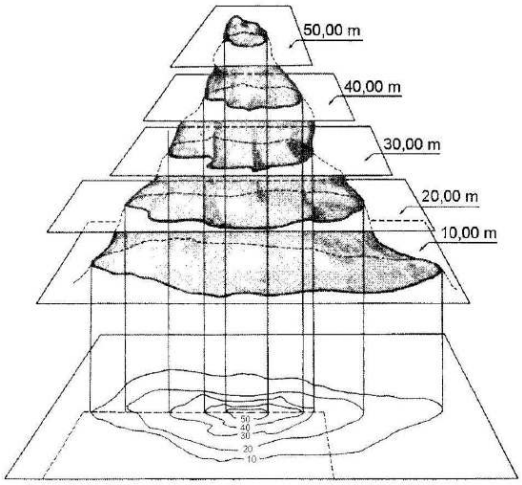
Curvas de nivel

Una forma alternativa de visualizar cómo es un campo escalar de dos variables es estudiar sus **curvas de nivel**, que son las curvas definidas en el plano XY por la ecuación $f(x,y)=c$ para cada número $c \in \mathbb{R}$. Este número c representa el nivel, de manera que el valor del campo $f(x,y)$ en todos los puntos de la curva de nivel es el mismo c. Geométricamente, la curva de nivel $(x,y)=c$ se obtiene proyectando sobre el plano XY la curva intersección de la superficie $z=f(x,y)$ con el plano horizontal de ecuación $z=c$.

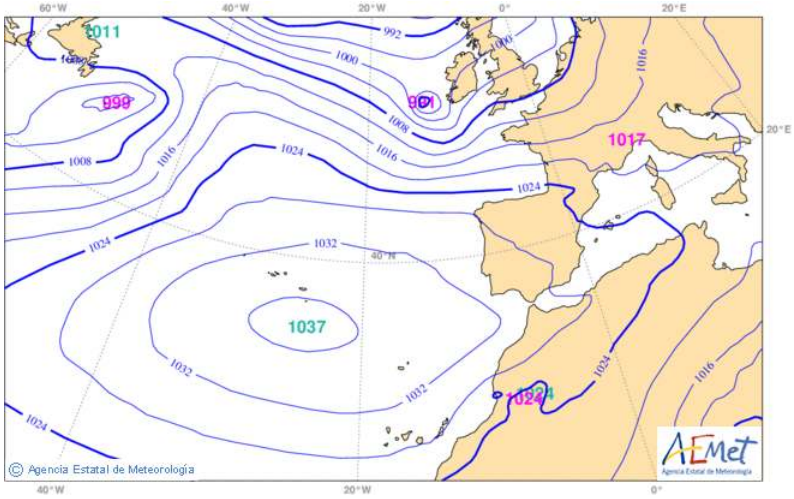


Curva de nivel por un punto. Curvas de nivel.

Ejemplos típicos de curvas de nivel son los mapas topográficos, donde una curva de nivel indica los puntos del terreno que están a una misma altura; los mapas meteorológicos de presión, donde las curvas de nivel, las isobaras, indican los puntos de la superficie sobre los que la presión es la misma; o los mapas meteorológicos de temperatura, donde las curvas de nivel, las isotermas, indican los puntos de la superficie sobre los que la temperatura es la misma. La aplicación CalcPlot3D permite dibujar las curvas de nivel de campos $f(x,y)$ definidas desde el teclado.

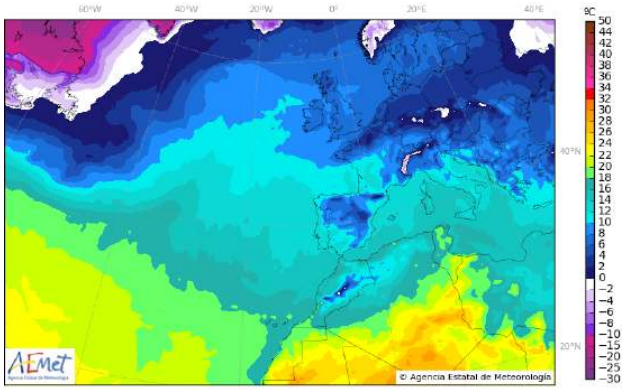


Curvas de nivel para $c = 10, 20, \ldots, 50$ metros.



Isobaras.

En los dos dibujos anteriores el valor del nivel de cada curva viene escrito sobre la curva. También es común utilizar, en vez de números, una graduación de colores para indicar la subida o bajada de los niveles, como en el mapa de isotermas que se muestra a continuación, lo que nos permite estimar el valor del campo en un punto (x, y) y analizar cómo crecen o decrecen los valores del campo.



Isotermas.

Hay otro tipo de información que se puede obtener, por ejemplo, en las zonas en las que las curvas están muy juntas, es decir, los intervalos entre niveles son estrechos, la superficie tiene una inclinación acentuada, mientras que en las zonas en las que las curvas

de nivel están muy separadas lo que ocurre es que la superficie tiene poca inclinación.

Las curvas de nivel de un campo central en el plano $f(x,y)=\psi\big(\|(x,y)\|\big)$ son circunferencias centradas en el origen y viceversa: si las curvas de nivel de un campo son circunferencias centradas en el origen, entonces el campo es central. Por ello se suele decir que los campos centrales en el plano tienen simetría circular.

Superficies de nivel. No es posible visualizar las superficies definidas por campos de tres variables, digamos $w=f(x,y,z)$, porque son conjuntos de $\mathbb{R}^4$. En este caso, tenemos como alternativa estudiar sus **superficies de nivel**, que son las superficies definidas en el espacio por la ecuación $f(x,y,z)=c$ para cada número $c\in\mathbb{R}$. Por ejemplo, las superficies de nivel de un campo central $f(x,y,z)=\psi\big(\|(x,y,z)\|\big)$ son esferas centradas en el origen y viceversa: si las superficies de nivel de un campo son esferas centradas en el origen, entonces el campo es central. Por ello se suele decir que los campos centrales en el espacio tienen simetría esférica.

Ejercicios

Ejercicio 1. Utiliza la aplicación CalcPlot3D para dibujar las gráficas de los campos que se dan a continuación y sus curvas de nivel.

(1)	$f(x,y)=\cos(\pi x)+\operatorname{sen}(\pi y)$	(2)	$f(x,y)=xy$	(3)	$f(x,y)=5-x^3+xy$
(4)	$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$	(5)	$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)/3}$	(6)	$f(x,y)=\sqrt{x^2+1+y^2}$
(7)	$f(x,y)=(3x+y)\cos(\pi xy)$	(8)	$f(x,y)=\sqrt{64-x^2}$	(9)	$f(x,y)=e^{-x}(2y^2-x^2)$
(10)	$f(x,y)=7xy/e^{x^2+y^2}$	(11)	$f(x,y)=xe^y+1$	(12)	$f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

Ejercicio 2. Sea $r=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ la distancia al origen desde un punto (x,y) del plano. Comprueba que las curvas de nivel de $f(x,y)=r^n$ (siendo $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$) son circunferencias centradas en el origen. ¿Cómo influye n en la posición relativa de las circunferencias de nivel entre sí?

Ejercicio 3. Describe cómo son las curvas de nivel de las siguientes superficies y dibújalas:

1. El paraboloide de revolución de ecuación $z=x^2+y^2$.
2. El cono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$. ¿Qué parecidos y diferencias observas con respecto a las del apartado 1?
3. El paraboloide hiperbólico de ecuación $z=x^2-y^2$.
4. El plano $z=1+x-y$.
5. La superficie de ecuación $z=\log(1+x-y)$. ¿Qué parecidos y diferencias observas con respecto a las del apartado 4?
6. La superficie $z=\sqrt{1+x-y}$. ¿Qué parecidos y diferencias observas con respecto a las de los apartados 4 y 5?

1.2. Gráfica de un campo escalar is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

1.3. Derivadas parciales

Derivadas parciales

El objetivo principal de este capítulo es explicar cómo se extiende el concepto de derivada de una función de una variable a campos escalares de varias variables. El concepto de derivada de una función $f(x)$ surge como solución del problema de trazar la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto. Para un campo de dos variables $f(x, y)$ nos plantearemos, en la siguiente sección, el problema de hallar el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en un punto de dicha superficie y veremos que de dicho planteamiento surge, de manera natural y por analogía con la definición de derivada, la noción de diferencial de un campo escalar de dos variables. En esta analogía desempeñan un papel fundamental las derivadas parciales, que son las que se obtienen derivando una función de varias variables con respecto a una de ellas cuando se dejan las demás constantes. En esta sección estudiamos las derivadas parciales y su interpretación geométrica.

Sea $f: U \to \mathbb{R}$ un campo continuo de dos variables y sea (a, b) un punto interior del conjunto U. La **derivada parcial de f con respecto a x en el punto (a, b)** es, si existe el límite, el número

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

O sea, la derivada parcial de f con respecto a x en (a, b) se calcula derivando la función f con respecto a su variable x mientras mantenemos su variable y constante e igual a b.

Análogamente, la **derivada parcial de f con respecto a y en el punto (a, b)** es, si existe el límite, el número

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

O sea, la derivada parcial de f con respecto a y en (a, b) se calcula derivando f con respecto a y mientras mantenemos $x = a$ constante.

Para el caso de tres variables, se definen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ como los valores que se obtienen al derivar con respecto a cada una de las variables manteniendo las otras dos constantes; por ejemplo

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{z \to c} \frac{f(a, b, z) - f(a, b, c)}{z - c}.$$

En algunos libros se emplean los incrementos de las variables, $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$, en los límites que definen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y},$$

y en 3D, tomando por ejemplo $\Delta z = z - c$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(a, b, c + \Delta z) - f(a, b, c)}{\Delta z}.$$

Observación práctica importante. En la práctica, para calcular una derivada parcial no se aplica el límite que la define, sino que se emplean las reglas habituales de derivación de funciones de una variable con la variable con respecto a la cual queremos derivar parcialmente, manteniendo constantes las demás variables. Por ejemplo, si tenemos $f(x, y) = \operatorname{sen}(\pi x^2 y) + x - x^3 y$ y queremos hallar sus derivadas parciales en el punto $(1, -2)$ hacemos lo siguiente: para hallar la derivada parcial de f con respecto a x, suponemos que la y es constante y derivamos como si f solo fuera función de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\pi x y \cos(\pi x^2 y) + 1 - 3x^2 y, \quad \text{luego} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = -4\pi \cos(-2\pi) + 7 = 7 - 4\pi.$$

Para hallar la derivada parcial de f con respecto a y, suponemos que la x es constante y derivamos como si f solo fuera función de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pi x^2 \cos(\pi x^2 y) - x^3, \quad \text{luego} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = \pi\cos(-2\pi) - 1 = \pi - 1.$$

Otras notaciones. Hay otras notaciones muy extendidas para denotar las derivadas parciales. Por ejemplo, si expresamos una variable u como función de x, y, z, digamos $u = f(x,y,z)$, entonces las derivadas parciales pueden aparecer escritas en diversos textos de las siguientes maneras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f = u_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f_z = D_z f = u_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Nosotros casi siempre usaremos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ o f_x. En algunos casos se manejan campos escalares $u(x,y,z,t)$ que dependen de tres variables espaciales x, y, z y del tiempo t. En estos casos, para la derivada parcial con respecto a t se emplea a menudo la notación de Newton con un punto sobreescrito: $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Vector diferencial y gradiente

El vector $Df(a,b,c) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c),\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right]$ formado por las derivadas parciales se llama **vector diferencial de f en el punto (a,b,c)**. Para campos de dos variables, se suprime la tercera coordenada y el vector diferencial de f en (a,b) es $Df(a,b) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\right]$.

En las aplicaciones, las variables x, y, z de un campo escalar $f(x,y,z)$ pueden representar diversas magnitudes: presión, volumen y temperatura; precios; ohmios, voltios y amperios; etc. Sin embargo, en muchos modelos de la física el contexto es el espacio tridimensional, en cuyo caso las variables x, y, z corresponden, específicamente, a longitudes (con signo) y se usan para representar posiciones $\vec{\mathbf{r}} = (x,y,z)$; se dice entonces que son variables espaciales. Para este caso, el diferencial de un campo escalar $Df(\vec{\mathbf{r}}) = [f_x(\vec{\mathbf{r}}),\ f_y(\vec{\mathbf{r}}),\ f_z(\vec{\mathbf{r}})]$ recibe el nombre de **vector gradiente** de f en $\vec{\mathbf{r}}$ y se representa de las siguientes maneras (el símbolo ∇ se lee nabla)

$$Df(\vec{\mathbf{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\mathbf{r}}) = \nabla f(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\mathbf{k}} = [f_x(\vec{\mathbf{r}}),\ f_y(\vec{\mathbf{r}}\ f_z(\vec{\mathbf{r}}))]\,.$$

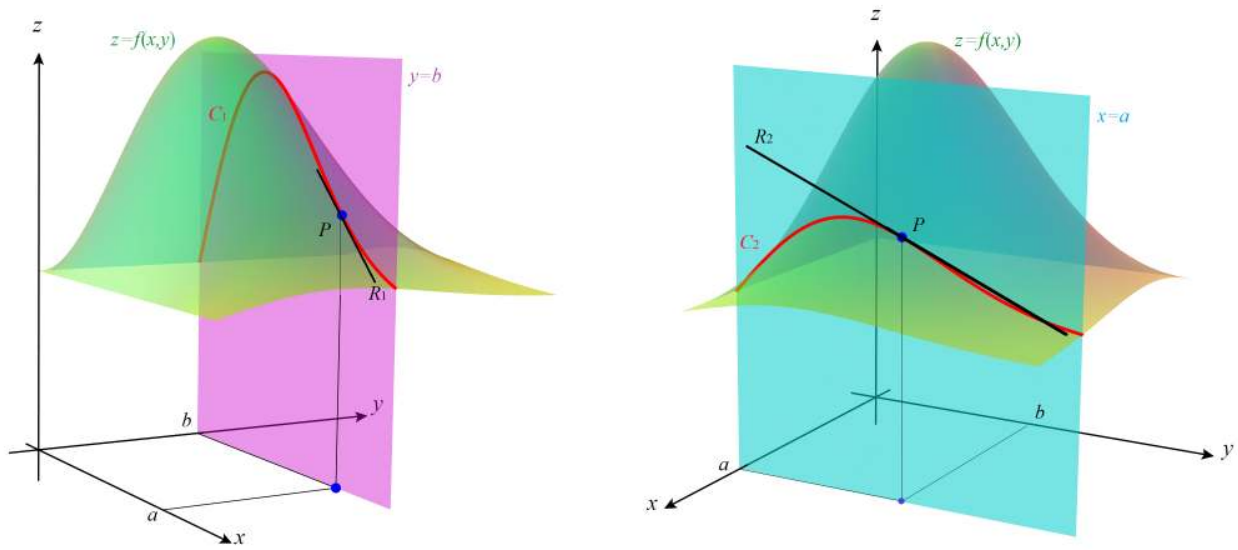
Para campos de dos variables, se suprime la tercera coordenada, y el gradiente es

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{j}}$$

*La distinción entre diferencial y gradiente es, pues, sutil y en la mayoría de los libros de un primer curso de cálculo de varias variables apenas se insiste en ello. No obstante, es una distinción importante en disciplinas como la física, la mecánica o el electromagnetismo. En este texto utilizaremos Df o ∇f indistintamente, con alguna excepción que se indicará oportunamente, aunque trataremos de emplear cada cual según lo que sea tradicional en cada contexto (por ejemplo, Df para el concepto de diferenciabilidad de la Sección 1.4, pero ∇f para la propiedad de ortogonalidad a las curvas de nivel de la Sección 1.5).

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Si consideramos el punto $P = (a,b,c)$ en la gráfica de f, de manera que $c = f(a,b)$, y cortamos dicha superficie con el plano de ecuación $y = b$, obtenemos una curva C_1 en dicho plano. Entonces la derivada parcial $f_x(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente R_1 a esta curva en P. Para ver esto, observemos que la curva C_1 viene dada, por ejemplo, por la parametrización $\vec{\mathbf{r}}_1(t) = \big(t, b, f(t,b)\big)$, con lo que $P = \vec{\mathbf{r}}_1(a)$ y un vector tangente a esta curva en el punto P es $\vec{\mathbf{T}}_1 = \vec{\mathbf{r}}\,'_1(a) = \big(1, 0, f_x(a,b)\big)$.



Interpretaciones geométricas de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (izquierda) y de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (derecha).

Análogamente, la derivada parcial $f_y(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente R_2 en el punto P a la curva C_2 que resulta de cortar la gráfica de f con el plano $x=a$. La curva C_2 viene dada, por ejemplo, por la parametrización $\vec{\mathbf{r}}_2(t)=\big(a,t,f(a,t)\big)$, con lo que $P=\vec{\mathbf{r}}_2(b)$ y un vector tangente a C_2 en P es $\vec{\mathbf{T}}_2=\vec{\mathbf{r}}p_2(b)=\big(0,1,f_y(a,b)\big)$.

En la siguiente sección usaremos estas interpretaciones de las derivadas parciales como las terceras componentes de los vectores $\vec{\mathbf{T}}_1$ y $\vec{\mathbf{T}}_2$ para resolver el problema de hallar el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en P.

Derivadas parciales segundas

Cuando existen las derivadas parciales de un campo escalar f en cada punto del dominio U se pueden definir las funciones derivadas parciales de f, que vienen dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon X\in U\to\frac{\partial f}{\partial x}(X)\in\mathbb{R},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\colon X\in U\to\frac{\partial f}{\partial y}(X)\in\mathbb{R},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}\colon X\in U\to\frac{\partial f}{\partial z}(X)\in\mathbb{R}.$$

En el ejemplo del campo $f(x,y)=\operatorname{sen}(\pi x^2y)+x-x^3y$, vimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\pi xy\cos(\pi x^2y)+1-3x^2y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\pi x^2\cos(\pi x^2y)-x^3.$$

Las derivadas parciales de una función se suelen llamar derivadas parciales de primer orden porque sólo se deriva una vez. A su vez, las funciones derivadas parciales de primer orden podrían ser derivables parcialmente, lo que nos lleva a plantear el proceso de derivación sucesiva introduciendo los conceptos de derivadas parciales segundas, terceras, etc.

Sea $f\colon U\to\mathbb{R}$ un campo de dos variables para el que existen sus funciones derivadas parciales primeras $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\colon U\to\mathbb{R}$. Las derivadas parciales de estas funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ se llaman, si existen, **derivadas parciales segundas** de f y, junto con sus notaciones habituales, son las siguientes:

- Derivada parcial segunda de f con respecto a x dos veces

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=D_{xx}f.$$

- Derivada parcial segunda (o cruzada) de f primero con respecto a x y luego con respecto a y

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}=D_{xy}f.$$

- Derivada parcial segunda (o cruzada) de f primero con respecto y y luego con respecto a x

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}=D_{yx}f.$$

- Derivada parcial segunda de f con respecto a y dos veces

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=D_{yy}f.$$

Volviendo al ejemplo del campo $f(x,y)=\operatorname{sen}(\pi x^2y)+x-x^3y$, tendríamos

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial(2\pi xy\cos(\pi x^2y)+1-3x^2y)}{\partial x}=2\pi y\cos(\pi x^2y)-(2\pi xy)^2\operatorname{sen}(\pi x^2y)-6xy,\\
f_{xy} &= \frac{\partial(2\pi xy\cos(\pi x^2y)+1-3x^2y)}{\partial y}=2\pi x\cos(\pi x^2y)-(2\pi xy)(\pi x^2)\operatorname{sen}(\pi x^2y)-3x^2,\\
f_{yx} &= \frac{\partial(\pi x^2\cos(\pi x^2y)-x^3)}{\partial x}=2\pi x\cos(\pi x^2y)-\pi x^2(2\pi xy)\operatorname{sen}(\pi x^2y)-3x^2,\\
f_{yy} &= \frac{\partial(\pi x^2\cos(\pi x^2y)-x^3)}{\partial y}=-\pi^2x^4\operatorname{sen}(\pi x^2y).
\end{aligned}$$

Observemos que se cumple $f_{xy}=f_{yx}$; veremos luego que esta igualdad se da casi siempre.

Reiterando el proceso, a partir de las derivadas parciales segundas se definen las derivadas parciales terceras de f, que son ocho, y así sucesivamente.

Para campos de tres variables, hay tres derivadas parciales primeras (f_x,f_y,f_z), nueve derivadas parciales segundas $(f_{xx},f_{xy},f_{xz},f_{yy},f_{yx},f_{yz},f_{zx},f_{zy},f_{zz})$, 27 derivadas parciales terceras, etc.

Funciones de clase C^n. Sea $f\colon U\to\mathbb{R}$ un campo escalar continuo con dominio U. Diremos que f **es de clase** $C^n(U)$ si existen todas las derivadas parciales de orden $1,2,3,\ldots,n$ y son continuas en U y diremos que f **es de clase** $C^\infty(U)$ si existen sus derivadas parciales de todos los órdenes y son continuas, éste es el caso habitual de los campos que aparecen en las aplicaciones.

Teorema de Clairaut-Schwarz de igualdad de las derivadas cruzadas. Sea $f\colon U\to\mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables de clase $C^2(U)$. Entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales en U, es decir, $f_{xy}=f_{yx}$ en U.

Para campos de clase C^2 de tres variables, lo que se verifica es la igualdad entre cada par de derivadas cruzadas: $f_{xy}=f_{yx}$, $f_{xz}=f_{zx}$ y $f_{yz}=f_{zy}$.

Para las derivadas terceras: $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$, y así sucesivamente.

[Una demostración]

Matriz hessiana de un campo escalar. Si $f\colon U\to\mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables de clase $C^2(U)$, las derivadas parciales segundas de f se agrupan en una matriz $D^2f=\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}$ que es simétrica, por el teorema de Schwarz, y se llama **matriz hessiana de f** o diferencial segunda de f (en el Capítulo 4 veremos por qué).

Cuando el campo escalar depende de tres variables y es de clase C^2, su matriz hessiana, que también es simétrica por el teorema de Schwarz, es

$$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}.$$

Ejercicios

Ejercicio 1. Calcula las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones y su valor en el origen de coordenadas y el punto $(1,2)$

(1)	$f(x,y)=\cos(\pi x)+\operatorname{sen}(\pi y)$	(2)	$f(x,y)=xy$	(3)	$f(x,y)=5-x^3+xy$
(4)	$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$	(5)	$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)/3}$	(6)	$f(x,y)=\sqrt{x^2+1+y^2}$
(7)	$f(x,y)=(3x+y)\cos(\pi xy)$	(8)	$f(x,y)=\sqrt{64-x^2}$	(9)	$f(x,y)=e^{-x}(2y^2-x^2)$
(10)	$f(x,y)=7xy/e^{x^2+y^2}$	(11)	$f(x,y)=xe^y+1$	(12)	$f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

Ejercicio 2. Sea $r=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$, el radio polar, la distancia al origen desde un punto (x,y) del plano. Determina el vector diferencial de los campos centrales $f(x,y)=r^n$ para $n=\pm1,\pm2,\ldots$ (en el caso $n=1$ hay que estudiar con cuidado qué pasa en el origen de coordenadas).

Ejercicio 3. Sean $\vec{\mathbf{c}}=(a,b)$ un vector de constantes y $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ una matriz simétrica. Determina el vector diferencial de los siguientes campos:

1. La aplicación lineal $g(x,y)=ax+by$ o, en términos vectoriales, $g(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}=(x,y)$ es el vector de posición de un punto en el plano.
2. La forma cuadrática $h(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ o, en términos vectoriales, $h(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\vec{\mathbf{r}}$.

Ejercicio 4. Formula y haz los Ejercicios 2 y 3 en el caso tridimensional.

Ejercicio 5. Calcula las matrices hessianas de los campos escalares de los Ejercicios 1, 2, 3 Y 4. Comprueba que, en general, la matriz hessiana de la forma cuadrática h generada por una matriz $\mathbf{A}$ simétrica es $D^2h=2\mathbf{A}$.

Ejercicio 6. Calcula las derivadas parciales primeras y segundas de los campos

$$f_1(x,y,z)=xyz, \qquad f_2(x,y,z)=\cos(zx)+\operatorname{sen}(xy), \qquad f_3(x,y,z)=xz-3xyz+xz^2+2y^2zx,$$
$$f_4(x,y,z)=x^2y+xz^2+y^2z.$$

Ejercicio 7. Prueba que los siguientes campos cumplen las ecuaciones que se indican (siendo ω una constante positiva):

1. $u(x,t)=e^{-t}\cos(x/\omega)$ cumple la ecuación del calor $u_t=\omega^2u_{xx}$.
2. $u(x,t)=(x-\omega t)^2$ cumple la ecuación de ondas $u_{tt}=\omega^2u_{xx}$.
3. $u(x,t)=\operatorname{sen}(nx)\cos(n\omega t)$ cumple la ecuación de ondas $u_{tt}=\omega^2u_{xx}$.
4. $u(x,y)=x^2-y^2+xy$ cumple la ecuación de Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Ejercicio 8. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann ligan las derivadas parciales de dos campos diferenciables u,v de la siguiente manera

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1. Prueba que $u=x^2-y^2$ y $v=2xy$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2. Prueba que $u=e^x\cos(y)$ y $v=e^x\operatorname{sen}(y)$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
3. Prueba que si dos campos u,v de clase C^2 cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces ambos cumplen la ecuación de Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$.

***Ejercicio 9.** Si no se dan las condiciones del teorema de Clairaut-Schwarz, puede ocurrir que las derivadas parciales cruzadas no sean iguales. Compruébalo con el siguiente ejemplo:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Prueba que sobre los puntos del eje X se tiene $f_y(x,0)=x$ y que sobre los puntos del eje Y se tiene $f_y(0,y)=-y$ (aplica directamente sus definiciones como límites).
2. Prueba que las derivadas cruzadas de f son distintas en el origen: $f_{yx}(0,0)=1$, mientras que $f_{xy}(0,0)=-1$ (aplica directamente sus definiciones como límites).
3. Prueba que la hipótesis del teorema de Clairaut-Schwarz que no se cumple es la de la continuidad de las derivadas cruzadas en el origen. Para ello, derivando directamente o bien usando la aplicación WolframAlpha, calcula las derivadas parciales cruzadas f_{xy} y f_{yx} para $(x,y)\neq(0,0)$ y calcula sus límites cuando $(x,y)\to(0,0)$ a lo largo de rectas de la forma $y=mx$.

1.3. Derivadas parciales is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

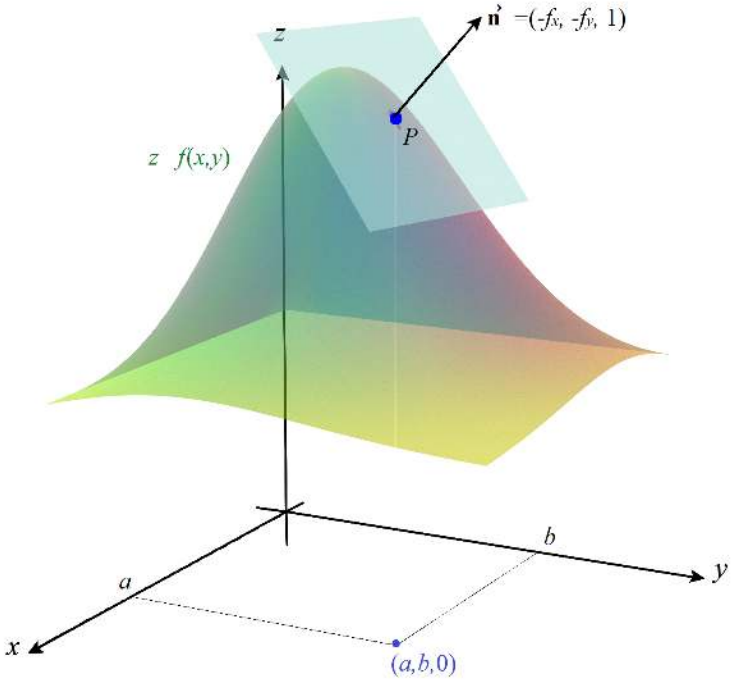
1.4. Campos escalares diferenciables

La construcción del plano tangente

Dados $f: U \to \mathbb{R}$, un campo escalar continuo de dos variables, y (a, b) un punto interior de U, sea $P = (a, b, c)$ el punto correspondiente en la gráfica de f, la superficie $z = f(x, y)$, de manera que $c = f(a, b)$. ¿Existe el plano tangente a la gráfica de f en P y, en ese caso, cuál es su ecuación?

Un plano tangente razonable debería cumplir las siguientes tres condiciones intuitivas:

1. La primera es la extensión al caso de dos variables de la propiedad que tienen las ordenadas de los puntos de la recta tangente a la gráfica de una función de una variable de ser buenas aproximaciones de los valores correspondientes de la propia función cerca del punto de tangencia. Por eso, pediremos que si (x, y, z) es un punto del plano tangente y (x, y) está cerca de (a, b), entonces z debe estar cerca de $f(x, y)$.
2. La segunda es una propiedad geométrica adicional: si C es una curva contenida en la superficie $z = f(x, y)$ que pasa por el punto P, entonces la recta tangente a C en P debe quedarse contenida en el plano tangente.
3. La tercera es que la construcción del plano tangente debe proporcionarnos los planos tangentes que ya conocemos en los casos de superficies como las esferas, los cilindros o los conos.



Vector normal y plano tangente.

Para construir el plano tangente, sabiendo que debe pasar por el punto P, basta con determinar un vector $\vec{\mathbf{n}}$ que sea perpendicular a dicho plano. Para ello, usaremos la interpretación geométrica de las derivadas parciales vista en la Sección 1.3. Allí se construyeron sobre la superficie gráfica de f las curvas C_1 y C_2 que se obtienen, respectivamente, al cortar la superficie con los planos verticales $y = b$ y $x = a$ y vimos que los vectores tangentes a dichas curvas en P son, respectivamente, $\vec{\mathbf{T}}_1 = \big(1, 0, f_x(a, b)\big)$ y $\vec{\mathbf{T}}_2 = \big(0, 1, f_y(a, b)\big)$.

De acuerdo con la segunda condición descrita antes, las rectas tangentes R_1 y R_2 a las curvas C_1 y C_2 en el punto P deberían quedar contenidas en el plano tangente. Por tanto, un vector perpendicular al plano tangente debería ser ortogonal tanto a $\vec{\mathbf{T}}_1$ como a $\vec{\mathbf{T}}_2$, así que podríamos tomar como vector perpendicular su producto vectorial

$$\vec{\mathbf{n}}(a, b) = \vec{\mathbf{T}}_1 \times \vec{\mathbf{T}}_2 = (1,\ 0,\ f_x(a, b)) \times (0,\ 1,\ f_y(a, b)) = \big(-f_x(a, b),\ -f_y(a, b),\ 1\big)\,.$$

Usando este vector como vector perpendicular, el plano tangente vendría dado por la ecuación

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big).$$

Ejemplo. Consideremos el punto $P=(1,2,2)$ en la esfera $x^2+y^2+z^2=9$. Sabemos que el plano tangente a la esfera en dicho punto es el que tiene como vector normal el radio-vector $\vec{\mathbf{r}}=(1,2,2)$ del propio punto. Si cerca de P escribimos la ecuación de la esfera en la forma $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ y calculamos las derivadas parciales obtenemos

$$f_x(1,2)=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}(1,2)=-1/2 \qquad f_y(1,2)=\frac{-2y}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}(1,2)=-1$$

con lo que, según lo visto antes, el vector perpendicular es $\vec{\mathbf{n}}(1,2)=(-(-1/2),-(-1),1)=(1/2,1,1)$ que, efectivamente, es paralelo a $\vec{\mathbf{r}}=(1,2,2)$.

Observación. Aunque en el ejemplo de la esfera las cosas funcionan bien, la mera existencia de las derivadas parciales no basta para que, en el caso de un campo escalar continuo cualquiera, el plano dado por $z=f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big)$ sea un plano tangente satisfactorio. Pueden construirse ejemplos patológicos de campos para los que existen las derivadas parciales pero el plano que se obtiene con ellas no cumple condiciones geométricas deseables que hemos citado antes. Veamos un ejemplo de esta situación no deseable.

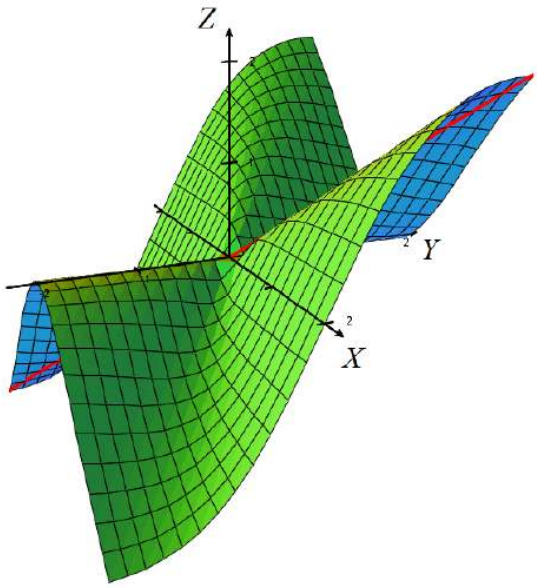
***Ejemplo patológico.** Consideremos la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ siendo f el campo escalar

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Este campo escalar es continuo en todo el plano (véase el Ejercicio 4 de la Sección 1.1), así que tiene sentido plantearse cuál es plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el origen $(0,0)$. Para ello, calculamos las derivadas parciales

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0, \qquad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=0,$$

con lo que la ecuación del plano tangente saldría $z=0$, o sea, el plano XY.



La superficie $z=\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)}$ y la recta $x=y=z$ (en rojo)

Ahora bien, como se aprecia en el dibujo, cuando nos acercamos al origen por una dirección distinta a la del eje X o a la del eje Y, la superficie parece seguir una recta inclinada y no se pega al plano tangente cerca del origen. Por ejemplo, la recta dada por $x=y=z$ está contenida en la superficie y pasa por el origen, por lo que debería estar contenida en el plano tangente $z=0$. Sin

embargo, esto no ocurre, lo que va en contra de las condiciones intuitivas de qué propiedades debe tener un plano tangente descritas antes. (Véase el Ejercicio 7.)

Afortunadamente, este ejemplo se aleja de la situación habitual en las aplicaciones. Vamos a ver que en (casi) todos los casos de interés en las aplicaciones, el plano $z = f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big)$ sí cumple propiedades de aproximación y tangencia satisfactorias. La condición adicional esencial es que las derivadas parciales f_x y f_y sean también continuas, es decir, que f sea de clase C^1.

Campo escalar diferenciable (2D)

Condición suficiente de diferenciabilidad. Sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en U. Si (a,b) es un punto interior de U, entonces se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - \big[f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big)\big]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \qquad \text{(Dif)}$$

en cuyo caso se dice que **el campo f es diferenciable en (a,b)**.

[Una demostración] [Es condición suficiente pero no necesaria]

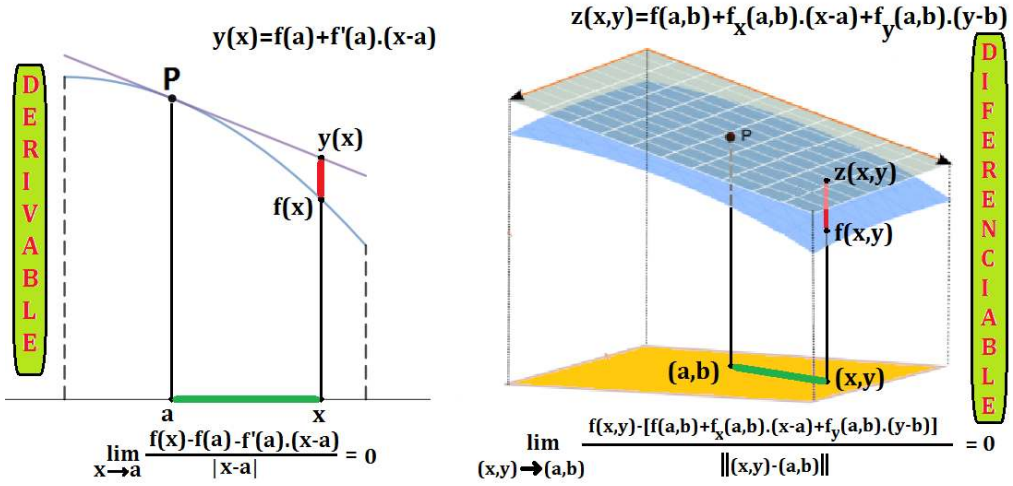
Observemos que la expresión $f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big)$ que aparece entre corchetes en el numerador es, precisamente, el valor de la coordenada z en la ecuación de (el candidato a) plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P = (a,b,f(a,b))$.

Interpretación geométrica de la diferenciabilidad. Para funciones de una variable, escribamos la definición de derivada $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ en la siguiente forma equivalente

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \big[f(a) + f'(a)(x-a)\big]}{|x-a|} = 0,$$

Esta igualdad nos dice que para x cerca de a, los valores de las ordenadas de la recta tangente $y(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ se aproximan muy bien a los valores de la función $f(x)$; mejor, de hecho, de que lo que se aproxima x al punto a.

Si en el cociente de la expresión anterior sustituimos en el numerador (señalado en rojo en la figura) la función $f(x)$ por el campo $f(x,y)$ y la ordenada $y(x)$ de la recta tangente por la altura $z(x,y)$ del candidato a plano tangente, y sustituimos en el denominador (señalado en verde en la figura) el valor absoluto $|x-a|$ por la distancia euclídea $\|(x,y)-(a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ en el plano, obtenemos precisamente la noción de campo escalar diferenciable. Es decir, si el campo f es diferenciable en el punto (a,b) entonces cerca de dicho punto los valores de la variable z en la ecuación del candidato a plano tangente $z(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\big(x-a\big) + f_y(a,b)\big(y-b\big)$ se aproximan muy bien a los valores del campo $f(x,y)$; mejor, de hecho, que lo que se aproxima (x,y) al punto (a,b).



Derivabilidad (1D) frente a diferenciabilidad (2D)

Plano tangente

En otras palabras, que el campo sea de clase C^1 garantiza, vía la diferenciabilidad, que se cumple la primera de las condiciones intuitivas que hemos formulado para que un plano pueda ser considerado un plano tangente razonable. Con respecto a la tercera, lo que hemos visto para el caso de un punto en una esfera podemos comprobarlo fácilmente también para un cono o un cilindro (véanse los Ejercicios 2 y 3). Finalmente, con respecto a la segunda condición, comprobaremos en la siguiente sección que si el campo es de clase C^1 entonces el candidato a plano tangente en P contiene, efectivamente, a la recta tangente de cualquier curva regular en P contenida en la superficie gráfica $z=f(x,y)$ del campo. Podemos entonces, con esta última salvedad, dar la siguiente definición.

Sean $f:U\to\mathbb{R}$ campo escalar de clase C^1 en su dominio U y (a,b) un punto interior de U, entonces el **plano tangente a la gráfica de f** en el punto $P=\big(a,b,f(a,b)\big)$ es el plano dado por la ecuación

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big).$$

Vamos a explorar con más detenimiento el concepto de campo escalar diferenciable y, en particular, cómo podemos extender este concepto a campos que dependen de más variables.

El vector diferencial y la diferenciabilidad de un campo escalar

Supongamos que $f(x,y)$ es un campo escalar de clase C^1 y sea (a,b) un punto interior de su dominio. Si escribimos la propiedad de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-\big[f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big)\big]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$

de la siguiente manera

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+\big[f_x(a,b),\ f_y(a,b)\big]\cdot\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}\right]}{\big\|\big(x-a,y-b\big)\big\|}=0$$

y comparamos esta expresión con la definición de derivada para funciones de una variable, observamos que el vector diferencial $Df(a,b)=\big[f_x(a,b),\ f_y(a,b)\big]$ desempeña, en la definición de función diferenciable de dos variables, el papel correspondiente a $f'(a)$ en la definición de derivada de una función de una variable.

Esto se ve aún más claramente si escribimos, por ejemplo, $A=(a,b)$ y $X=(x,y)$, entonces cuando el campo escalar f es diferenciable en A tenemos

$$\lim_{X\to A}\frac{f(X)-\big[f(A)+Df(A)\cdot(X-A)\big]}{\|X-A\|}=0.$$

Esto justifica que $Df(A)=\big[f_x(A),\ f_y(A)\big]$ se llame vector diferencial de f en A. Veremos en el siguiente apartado que esta formulación tiene una extensión inmediata a campos en 3D.

La fórmula de los incrementos finitos (2D). En muchos textos, la definición de función diferenciable se escribe de una manera más adecuada para algunas aplicaciones. Si llamamos $\varepsilon(x,y)$ al cociente

$$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-\big[f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big)\big]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

Entonces, decir que f es diferenciable en (a,b) es equivalente a decir que f se puede escribir como

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)\big(x-a\big)+f_y(a,b)\big(y-b\big)+\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

donde $\varepsilon(x,y)$ es una función tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y)=0$.

Si utilizamos los incrementos de las variables independientes $\Delta x = x-a$, $\Delta y = y-b$ y el correspondiente incremento de la variable dependiente $\Delta f = f(x,y)-f(a,b)$, tenemos

$$\Delta f = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon(x,y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}$$

que se conoce como **fórmula de los incrementos finitos** y se suele usar para estimar cómo son los incrementos de la variable dependiente para incrementos pequeños de las variables independientes:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

donde $\Delta x, \Delta y$ son suficientemente pequeños y la aproximación es de tamaño despreciable frente a ambos incrementos.

Campo escalar diferenciable (3D)

Si, para un campo escalar de tres variables, queremos seguir el mismo camino usado para definir el concepto de campo escalar diferenciable de dos variables, nos encontramos con una dificultad inicial: no es posible visualizar la noción de plano tangente a una superficie en $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, dado un punto $A=(a,b,c)$ interior al dominio de definición de un campo $f(x,y,z)$, tiene perfecto sentido plantearse si, tomando $X=(x,y,z)$, se cumple

$$\lim_{X\to A} \frac{f(X)-\big[f(A)+Df(A)\cdot(X-A)\big]}{\|X-A\|}=0.$$

siendo $Df(A)=\big[f_x(A),\ f_y(A),\ f_z(A)\big]$ el vector diferencial de f en A. Cuando se cumpla que, efectivamente, dicho límite es cero diremos que el campo escalar f es **diferenciable** en el punto A. Como en el caso bidimensional, puede probarse que si f es de clase C^1 en su dominio, entonces f es diferenciable en todos los puntos del dominio (lo que también vale para campos escalares que dependen de más variables).

De forma similar al caso de dos variables, puede darse una **fórmula de los incrementos finitos** para campos de tres variables:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \varepsilon(x,y,z)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2+(\Delta z)^2}$$

siendo $\varepsilon(x,y,z)$ una función tal que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,z)} \varepsilon(x,y,z)=0$. Es decir

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z.$$

Operaciones con campos diferenciables

Sean $f, g\colon U\to\mathbb{R}$ campos escalares diferenciables en un punto A interior a U, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$. Entonces los campos $\alpha f+\beta g$, fg, f^n y, si $g(A)\neq 0$, f/g son diferenciables en A y se verifica:

$$D(\alpha f+\beta g)=\alpha Df+\beta Dg, \qquad D(fg)=fDg+gDf, \qquad Df^n=nf^{n-1}Df, \qquad D(f/g)=\frac{gDf-fDg}{g^2}$$

donde las funciones y sus diferenciales están evaluados en A.

Observemos que entre estas operaciones falta el cambio de variables o, en otros términos, la operación de composición de funciones. A ella le dedicaremos la siguiente sección, donde veremos la regla de la cadena para campos escalares. Usando la regla

de la cadena junto con las operaciones aritméticas que acabamos de ver se comprueba que la práctica totalidad de los campos escalares que aparecen en los ejemplos habituales y en las aplicaciones a la geometría y otras ciencias son diferenciables.

Ejercicios

Ejercicio 1. Halla las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = f(x,y)$ en los puntos $P = \big(0,0,f(0,0)\big)$ y $Q = \big(1,-2,f(1,-2)\big)$.

(1)	$f(x,y) = \cos(\pi x) + \operatorname{sen}(\pi y)$	(2)	$f(x,y) = xy$
(3)	$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/3}$	(4)	$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$
(5)	$f(x,y) = 5 - x^3 + xy$	(6)	$f(x,y) = \sqrt{64 - x^2}$
(7)	$f(x,y) = x - 3y + 4$	(8)	$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$
(9)	$f(x,y) = \operatorname{sen}\big(\pi(x+y)\big)$	(10)	$f(x,y) = \log(1 + 2x^2 + 3y^2)$
(11)	$f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$	(12)	$f(x,y) = e^{-2x} + \cos(y)$

Ejercicio 2. Si tenemos un punto P en un cilindro circular recto de radio R y situamos los ejes de coordenadas de manera que $P = (0,0,R)$ y la ecuación del cilindro es $x^2 + z^2 = R^2$, sabemos de la geometría elemental que el plano tangente al cilindro en P es $z = R$. Prueba que dicho plano coincide con el que se obtiene al aplicar al campo $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2}$ el procedimiento descrito en esta sección.

Ejercicio 3. Si en un cono circular recto tomamos un punto P distinto de su vértice y situamos los ejes de coordenadas de manera que $P = (1,0,c)$ y la ecuación del cono es $z^2 = c^2(x^2 + y^2)$, sabemos de la geometría elemental que el plano tangente al cilindro en P es $z = cx$. Prueba que dicho plano coincide con el que se obtiene al aplicar al campo $f(x,y) = c\sqrt{x^2 + y^2}$ el procedimiento descrito en esta sección.

Ejercicio 4. Una máquina fabrica hojas de papel de tamaño A4 ($210\,\text{mm} \times 297\ \text{mm}$) con una cierta holgura de ± 1 mm en ambas dimensiones. Utiliza la fórmula de los incrementos finitos para hallar cómo pueden afectar estas holguras al área de la hoja.

Ejercicio 5. Los errores en la medición del radio y la altura de un cono circular recto son, respectivamente, del 2% y el 1%, ¿Cuáles son los errores aproximados de su volumen y su área?

Ejercicio 6. Los errores en la medida de dos resistencias un punto $R_1 = 200$ ohmios y $R_2 = 500$ ohmios son del 1% y el 3%, respectivamente. ¿Cuál es el error aproximado en la medida de la resistencia resultante si se conectan en serie? ¿y si se conectan en paralelo?

***Ejercicio 7.** Prueba que el campo escalar del ejemplo patológico

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es diferenciable en el origen. Para ello, calcula el límite cuando (x,y) tiende al origen a lo largo de una recta $y = mx$.

1.4. Campos escalares diferenciables is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

1.5. La regla de la cadena

La regla de la cadena para una variable independiente

La regla de la cadena permite calcular las derivadas parciales de un campo escalar cuando cambiamos las variables independientes, lo que, como en el caso de una variable, puede simplificar algunos cálculos (en el cálculo de integrales dobles y triples sobre todo, como veremos en el capítulo correspondiente) o proporcionar nuevas interpretaciones físicas cuando estudiamos modelos de las aplicaciones. En los siguientes capítulos analizaremos más a fondo los cambios de variables más importantes y otras implicaciones de la regla de la cadena.

Empezaremos por el caso más simple: tenemos un campo escalar f de dos o tres variables y ahora hacemos depender dichas variables de una nueva variable independiente t; esto es lo que ocurre, por ejemplo, cuando nos interesa conocer el efecto de f sobre una curva. Estudiaremos después la regla de la cadena cuando cambiamos las variables independientes por otras nuevas.

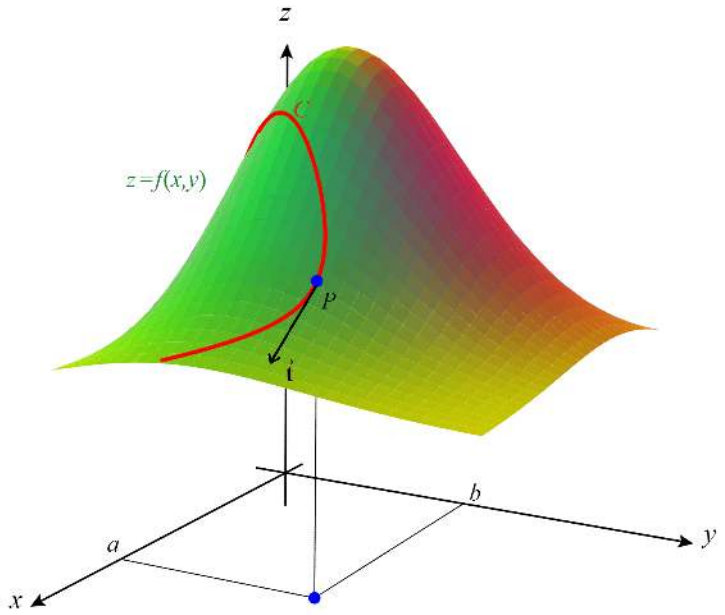
Regla de la cadena para una variable independiente. Sea f un campo escalar de tres variables de clase $C^1(U)$. Sean $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ funciones derivables de t tales que los puntos $\vec{\mathbf{r}}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ están en U. Entonces $\psi(t)=f\big(\vec{\mathbf{r}}(t)\big)=f\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ es una función derivable y se verifica

$$\psi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}z'(t)=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]\cdot\begin{bmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{bmatrix}=Df\big(\vec{\mathbf{r}}(t)\big)\cdot\vec{\mathbf{r}}\,'(t).$$

Si f depende de dos variables, entonces, suprimiendo la coordenada z, la regla queda $\psi'(t)=f_x x'(t)+f_y y'(t)$

[Idea de una *demostración en (2D): Para calcular $\psi'(t_0)$ sustituye (x,y) por $(x(t),y(t))$ y (a,b) por $(x(t_0),y(t_0))$ en la condición de diferenciabilidad (Dif) de la Sección 1.4. y usa el teorema del valor medio para estimar las diferencias $x(t)-x(t_0)=x'(t_x)(t-t_0)$, $y(t)-y(t_0)=y'(t_y)(t-t_0)$ para ciertos t_x,t_y entre t y t_0.]

Propiedad de tangencia a las curvas del plano tangente a una superficie. Con la regla de la cadena podemos comprobar, como anunciamos en la sección anterior, que si f es un campo escalar de dos variables y f es de clase C^1 en su dominio U y (a,b) es un punto interior de U, entonces el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en $P=\big(a,b,f(a,b)\big)$ tiene la propiedad de contener las rectas tangentes a todas las curvas regulares contenidas en la superficie y que pasan por P.



Curva C sobre una superficie $z=f(x,y)$ y su vector tangente en P.

Para ver esto, supongamos que C es una curva regular $\vec{\mathbf{r}}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ totalmente contenida en la superficie $z=f(x,y)$ y que pasa por el punto $P=(a,b,f(a,b))$. Tenemos entonces que $z(t)=f\big(x(t),y(t)\big)$, porque la curva está contenida en la

sperficie, y que $a = x(t_0)$ y $b = y(t_0)$ para algún valor t_0 porque la curva pasa por P. Sabemos que $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{r}}\,'(t_0)$ es un vector tangente a la curva C en P. Usando la regla de la cadena para hallar $z'(t)$, tenemos

$$\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{r}}\,'(t_0) = \big(x'(t_0),\ y'(t_0),\ f_x(a,b)x'(t_0) + f_y(a,b)y'(t_0)\big)$$

que, obviamente, es perpendicular al vector normal al plano tangente $\vec{\mathbf{n}}(a,b) = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$. En consecuencia, la recta tangente a C en P está contenida en el plano tangente.

Derivadas de orden superior. Si f y $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ pueden derivarse más veces, entonces se puede usar la regla de la cadena para hallar las derivadas de orden superior. Por ejemplo, para dos variables

$$\begin{aligned}\psi'' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}y'\right)x' + \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}x' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)y' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}x'y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y''.\end{aligned} \tag{1}$$

Volveremos sobre esto con más detalle cuando estudiemos, en el siguiente capítulo, la técnica de derivación implícita.

La regla de la cadena para dos variables independientes

Puesto que una derivada parcial no es más que derivar con respecto a una variable manteniendo las demás constantes, la regla de la cadena cuando se cambian más variables se deduce directamente de la que acabamos de ver. Sea $f(x,y)$ un campo escalar de clase C^1. Sean $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ funciones de clase C^1 con respecto a las nuevas variables u y v. Entonces la composición $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ es de clase C^1 y se verifica

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Observación sobre la notación. A veces se utiliza la misma letra para denotar la función dependiente, sin tener en cuenta qué variables independientes estamos considerando en cada momento; por eso, a menudo, la regla de la cadena se escribe, usando subíndices, como

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u \qquad \text{y} \qquad f_v = f_x x_v + f_y y_v.$$

Señalemos el doble papel que juega f en esta expresión como función que depende de x e y, en primer lugar, y de u y v tras el cambio.

Regla de la cadena para coordenadas polares. El cambio a coordenadas polares es, seguramente, el cambio más importante en el plano. Veamos qué nos dice la regla de la cadena cuando pasamos de cartesianas a polares y viceversa. Si $f(x,y)$ es un campo escalar dado inicialmente en variables cartesianas (x,y) y hacemos el cambio a coordenadas polares (r,θ), de forma que $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, entonces, de acuerdo con la regla de la cadena, las derivadas parciales de f como función de las coordenadas cartesianas (x,y) están relacionadas con las derivadas parciales de f como función de las coordenadas polares (r,θ) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos(\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned} \tag{2}$$

Recíprocamente, si tenemos el campo $f(r,\theta)$ dado inicialmente en coordenadas polares $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$, entonces las derivadas parciales de f como función de las coordenadas cartesianas (x,y) vienen dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}.\end{aligned} \tag{3}$$

Gradiente en coordenadas polares. En la Sección 1.3 hicimos mención a la distinción entre el diferencial y el gradiente de un campo escalar. Si tenemos un campo escalar definido en términos de las coordenadas polares, para calcular su gradiente, el vector

de las derivadas parciales con respecto a las variables espaciales, usamos las expresiones que acabamos de calcular, de manera que la expresión del gradiente en coordenadas polares es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right)\vec{\mathbf{j}}.$$

Veamos un ejemplo simple que puede ayudar a entender la distinción entre diferencial y gradiente. Sea f el campo expresado en coordenadas cartesianas por $f(\vec{\mathbf{r}}) = x^2 + y^2$, entonces $\nabla f(\vec{\mathbf{r}}) = 2x\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}}$. Para el mismo campo f pero expresado en coordenadas polares $f(\vec{\mathbf{r}}) = r^2$ tenemos $Df = [f_r, f_\theta] = [2r, 0]$, mientras que

$$\nabla f(\vec{\mathbf{r}}) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right)\vec{\mathbf{j}} = 2r\cos(\theta)\vec{\mathbf{i}} + 2r\operatorname{sen}(\theta)\vec{\mathbf{j}} = x\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}}.$$

Gradiente de un campo central (2D). Sea f un campo central de dos variables, de manera que $f(\vec{\mathbf{r}}) = \psi(r)$, siendo $r = \|\vec{\mathbf{r}}\|$ el radio polar y ψ una función de una variable. Entonces, usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que $\dfrac{\partial \psi}{\partial r} = \psi'(r)$ y que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\nabla f(\vec{\mathbf{r}}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right)\vec{\mathbf{j}} = \psi'(r)\cos(\theta)\vec{\mathbf{i}} + \psi'(r)\operatorname{sen}(\theta)\vec{\mathbf{j}} \\ &= \frac{\psi'(r)}{r}\left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}\right) = \frac{\psi'(r)}{r}\vec{\mathbf{r}}.\end{aligned}$$

Regla de la cadena para tres variables independientes

Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar de clase $C^1(U)$. Sean $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ y $z = z(u, v, w)$ funciones de clase C^1 con respecto a tres nuevas variables u, v y w. Entonces $g(u, v, w) = f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)$ es de clase C^1 y se verifica

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial g}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}.\end{aligned} \tag{4}$$

Gradiente de un campo central (3D). Si $f(\vec{\mathbf{r}})$ es un campo central de tres variables $\vec{\mathbf{r}} = \left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right)$, entonces f viene dado por $f(\vec{\mathbf{r}}) = \psi(\rho)$, siendo $\rho(x, y, z) = \|(\vec{\mathbf{r}})\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y ψ una función de una variable. Entonces, razonando como en el caso bidimensional, su gradiente viene dado por

$$\nabla f(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\psi'(\rho)}{\rho}\left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right) = \frac{\psi'(\rho)}{\rho}\vec{\mathbf{r}}.$$

En particular, para los campos dados por una potencia de ρ, digamos $f(\vec{\mathbf{r}}) = \rho^n$ tenemos $\nabla(\rho^n) = n\rho^{n-2}\vec{\mathbf{r}}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (excluyendo el origen si $n \leq 1$.)

Ejercicios

Ejercicio 1. Comprueba la igualdad de la regla de la cadena para $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 1$ en el punto $(2, -1)$ al hacer el cambio de variables $x = 2t$ e $y = -t$.

Ejercicio 2. Comprueba la igualdad de la regla de la cadena para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ al hacer el cambio de variables $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$, $z(t) = t$.

Ejercicio 3. Prueba que la ecuación $yf_x - xf_y = 0$ caracteriza los campos centrales de dos variables. Para ello prueba, aplicando la regla de la cadena, que dicha ecuación se transforma en la ecuación $f_\theta = 0$ cuando pasamos a coordenadas polares.

Ejercicio 4. Sea $z = z(x, y)$ un campo escalar de dos variables que verifica $xz_x + yz_y = 0$. Aplica la regla de la cadena para hallar en qué se transforma esta igualdad cuando pasamos a coordenadas polares.

Ejercicio 5. Sea $z = z(x, y)$ un campo escalar de dos variables que verifica $z_x + z_y = 0$. Si cambiamos las variables independientes x e y por las variables $u = x + y$, $v = x - y$, ¿qué igualdad verifica z como función de las nuevas variables u y v?

Ejercicio 6. Determina en qué ecuación se transforma la ecuación en derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ cuando se aplica el cambio de variables $u = x - y$, $v = x - 2y$.

Ejercicio 7. Sea $y = \psi(x)$ una curva definida para $x \in \mathbb{R}$, donde ψ es dos veces derivable y la variable t representa el tiempo. Entonces la función $z(x, t) = \psi(x - \omega t)$ representa el desplazamiento de la gráfica de ψ que se desliza como una onda hacia la derecha del eje X a velocidad ω.

1. Prueba que $z(x, t)$ es una solución de la ecuación de ondas $z_{tt} = \omega^2 z_{xx}$.
2. ¿Pasa lo mismo con $z(x, t) = \psi(x + \omega t)$?, ¿cómo se interpreta esta función?

Ejercicio 8. Sea $z(x, t)$ una solución de la ecuación de ondas $z_{tt} = \omega^2 z_{xx}$, donde ω es una constante no nula. Aplica el cambio de variables $u = x - \omega t$, $v = x + \omega t$ para transformar la ecuación de ondas en la ecuación $z_{uv} = 0$ y deduce que la solución $z(x, t)$ puede expresarse como la superposición $z(x, t) = \psi(x - \omega t) + \xi(x + \omega t)$ de dos ondas que viajan, respectivamente, hacia la derecha y hacia la izquierda del eje X a velocidad ω.

Ejercicio 9. Escribe las reglas de la cadena para calcular las derivadas parciales de una función de tres variables $f(x, y, z)$ cuando las tres variables x, y y z pasan a depender de dos variables u y v; digamos $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

***Ejercicio 10.** Sea $z(x, y)$ un campo escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$. Halla, cuando sea posible, un cambio de variables de la forma $u = x + ay$, $v = x + by$ que transforme la ecuación $\alpha z_{xx} + \beta z_{xy} + \gamma z_{yy} = 0$ (donde α, β, γ son constantes, alguna de ellas no nula) en la ecuación $z_{uv} = 0$.

***Ejercicio 11.** En la Sección 1.3 vimos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que ligan las derivadas parciales de dos campos diferenciables $u(x, y)$, $v(x, y)$ de la siguiente manera $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Prueba que si $f(u, v)$ cumple la ecuación de Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$, y hacemos un cambio $u = u(x, y), v = v(x, y)$ de clase C^2 que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $g(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ también cumple la ecuación de Laplace para sus variables, es decir, $g_{xx} + g_{yy} = 0$.

1.5. La regla de la cadena is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

1.6. Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente

Derivadas direccionales

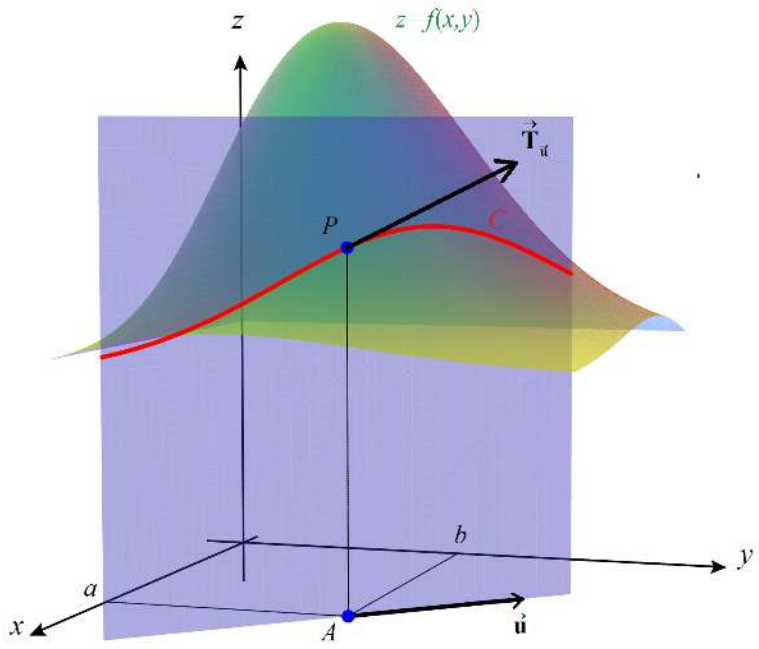
La derivada parcial $f_x(a,b)$ de un campo escalar f es su tasa de variación cuando nos acercamos al punto (a,b) manteniendo constante $y=b$, o sea, cuando nos acercamos según la dirección $\vec{\mathbf{i}}=(1,0)$. Análogamente, $f_y(a,b)$ nos da la tasa de cambio de f al acercarnos según la dirección $\vec{\mathbf{j}}=(0,1)$. Podemos plantearnos cómo varía f cuando nos acercamos según otras direcciones.

Derivada direccional. Sea $f: U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos o tres variables de clase $C^1(U)$ y sea A un punto interior de U. Dado un vector unitario $\vec{\mathbf{u}}$, la **derivada direccional de f en la dirección $\vec{\mathbf{u}}$** es, si existe el límite, el número

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\vec{\mathbf{u}}) - f(A)}{t}.$$

Es decir, si definimos la función de una variable $\psi(t) = f(A+t\vec{\mathbf{u}})$, entonces $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(A) = \psi'(0)$.

Interpretación geométrica de la derivada direccional. Para dos variables, la derivada direccional $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b)$ da la tasa de cambio de f al acercarnos al punto $A=(a,b)$ según la dirección marcada por $\vec{\mathbf{u}}=(u_1,u_2)$ y admite una interpretación análoga a la de las derivadas parciales.



Interpretación geométrica de la derivada direccional.

Si cortamos la gráfica de f, o sea, la superficie S de ecuación $z=f(x,y)$, con el plano vertical que pasa por el punto $P=\big(a,b,f(a,b)\big)$ y se apoya en la recta del plano XY que pasa por $A=(a,b)$ y tiene vector director $\vec{\mathbf{u}}$, obtenemos una curva C que está contenida en S y pasa por P. Entonces la derivada direccional $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a C en P como curva en el plano vertical, recta que se conoce como **recta tangente a la gráfica de f según la dirección $\vec{\mathbf{u}}$**.

La curva C podemos parametrizarla mediante $\vec{\mathbf{r}}(t) = \big(a+tu_1, b+tu_2, f(A+t\vec{\mathbf{u}})\big)$, con lo que $P=\vec{\mathbf{r}}(0)$ y un vector tangente a la curva C en el punto P es, precisamente, $\vec{\mathbf{T}}_{\vec{\mathbf{u}}} = \vec{\mathbf{r}}\,'(0) = \Big(u_1, u_2, D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b)\Big)$. Como vimos en la Sección 1.5, el vector $\vec{\mathbf{T}}_{\vec{\mathbf{u}}}$ debe ser perpendicular al vector $\vec{\mathbf{n}}(a,b) = \big(-f_x(a,b), -f_x(a,b), 1\big)$, que es el vector normal al plano tangente a S en P. Entonces

$$0 = \vec{\mathbf{T}}_{\vec{\mathbf{u}}} \cdot \vec{\mathbf{n}}(a,b) = -u_1 f_x(a,b) - u_2 f_y(a,b) + D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b),$$

por tanto, despejando $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b)$ y usando, como es tradicional en este contexto, el gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$, obtenemos

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b) = u_1 f_x(a,b) + u_2 f_y(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{\mathbf{u}},$$

que es una fórmula muy útil para calcular las derivadas direccionales. Esta fórmula también vale para el caso de un campo escalar de tres variables, como se puede comprobar usando directamente la regla de la cadena.

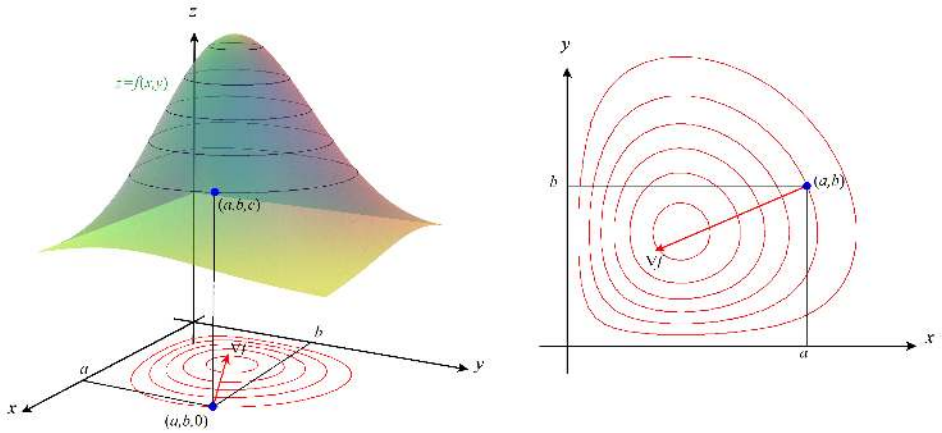
Propiedades del gradiente

Propiedad de dirección óptima del gradiente. Sean $f: U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables de clase $C^1(U)$, (a,b) un punto interior de U y $\vec{\mathbf{u}}$ un vector unitario. Si $\alpha_{\vec{\mathbf{u}}}$ es el ángulo que forman $\nabla f(a,b)$ y $\vec{\mathbf{u}}$, entonces la expresión que acabamos de deducir se puede escribir

$$D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \|\nabla f(a,b)\| \cdot \|\vec{\mathbf{u}}\| \cdot \cos\left(\alpha_{\vec{\mathbf{u}}}\right) = \|\nabla f(a,b)\| \cdot \cos\left(\alpha_{\vec{\mathbf{u}}}\right).$$

Si $\nabla f(a,b) \neq 0$, este valor alcanza su máximo cuando $\alpha_{\vec{\mathbf{u}}} = 0$, es decir, cuando $\vec{\mathbf{u}} = \nabla f(a,b) / \|\nabla f(a,b)\|$ es el vector unitario de la misma dirección y sentido que el gradiente $\nabla f(a,b)$, en cuyo caso dicho máximo vale $\|\nabla f(a,b)\|$.

Análogamente, el valor mínimo de $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(a,b)$ se alcanza cuando $\vec{\mathbf{u}} = -\nabla f(a,b) / \|\nabla f(a,b)\|$ es el vector unitario de la misma dirección y sentido contrario que $\nabla f(a,b)$ y dicho valor mínimo es $-\|\nabla f(a,b)\|$.

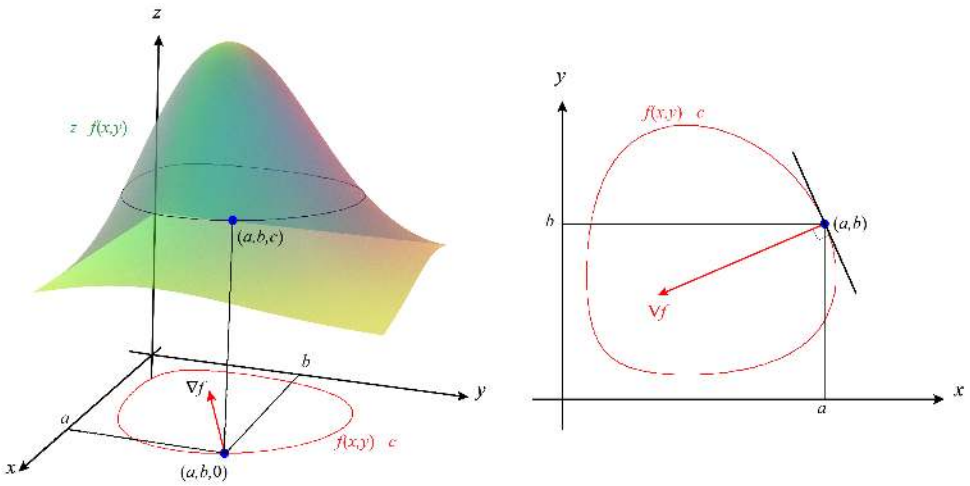


Propiedad de dirección óptima del gradiente.

Esto significa que si consideramos un mapa topográfico de una montaña, el vector gradiente en un punto genérico indicará la dirección de máxima inclinación de subida desde ese punto.

Propiedad de normalidad del gradiente. Sea $c = f(a,b)$ y consideremos la curva de nivel $f(x,y) = c$ que pasa por (a,b). Si dicha curva es regular en el punto (a,b), entonces el vector gradiente $\nabla f(a,b)$ es normal a la curva de nivel $f(x,y) = c$ en dicho punto. En otros términos, si $\nabla f(a,b)$ no es el vector cero, entonces el vector $\left[-f_y(a,b),\ f_x(a,b)\right]$ es tangente a la curva de nivel en (a,b).

Podemos ver esta propiedad tomando una parametrización de la curva de nivel, digamos $(x(t), y(t))$. Entonces $f(x(t), y(t))) = c$ para cualquier valor del parámetro t, así que derivando con respecto a t, tenemos $f_x x' + f_y y' = 0$, luego $\nabla f = (f_x, f_y)$ es perpendicular al vector tangente a la curva de nivel (x', y').



Normalidad del gradiente a la curva de nivel.

Otra forma de verlo es la siguiente: Sea C la curva que se obtiene al cortar la superficie $z=f(x,y)$ con el plano horizontal $z=c$. Entonces dicha curva pasa por $P=(a,b,c)$ así que la recta tangente R a la curva C en P está contenida en el plano tangente $z=c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$. Por otro lado, dicha recta tangente R está contenida en el plano $z=c$, así que la recta R es la intersección de los planos $z=c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ y $z=c$. Usamos ahora que la recta tangente a la curva de nivel $f(x,y)=c$ en el punto (a,b) es la proyección de R sobre el plano XY, es decir, la recta que viene dada por la ecuación $c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=c$ o, lo que es lo mismo, $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Calcula las derivadas direccionales en la dirección $\vec{\mathbf{u}}$ que se indica de las siguientes funciones en el origen de coordenadas y el punto $(1,-1)$.

1. $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$ y $\vec{\mathbf{u}}=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$.
2. $f(x,y)=\operatorname{sen}\big(\pi(x+y)\big)\cos\big(\pi(x-y)\big)$ y $\vec{\mathbf{u}}=(1/2,\sqrt{3}/2)$.
3. $f(x,y)=1+2x-3xy+y^2$ y $\vec{\mathbf{u}}=(-1,0)$.
4. $f(x,y)=e^{xy}-\log(1+x)$ y $\vec{\mathbf{u}}=(\sqrt{3}/2,-1/2)$.

Ejercicio 2. Sean $\vec{\mathbf{r}}=(x,y)$ el vector de posición de un punto en el plano y $r=\|\vec{\mathbf{r}}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ su distancia al origen. Sean $\vec{\mathbf{c}}$ un vector de constantes y $\mathbf{A}$ una matriz simétrica de orden 2. Sea $\vec{\mathbf{u}}$ un vector unitario. Prueba que

$$D_{\vec{\mathbf{u}}}\big(r^n\big)=nr^{n-2}(\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{u}}),\qquad D_{\vec{\mathbf{u}}}\big(\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{r}}\big)=\vec{\mathbf{c}}\cdot\vec{\mathbf{u}},\qquad D_{\vec{\mathbf{u}}}\big(\vec{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{r}}\big)=2\vec{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{u}},$$

y comprueba que se dan igualdades análogas en el caso de tres variables.

Ejercicio 3. De un campo escalar diferenciable f se sabe que en el punto $P=(1,2)$ su derivada direccional en la dirección desde P hacia $A=(2,1)$ vale 2 y que su derivada direccional en la dirección desde P hacia $B=(0,-1)$ vale -2. Halla el gradiente de f en P.

Ejercicio 4. Se sabe que $(1,-1,-2)$ es un punto de una superficie $z=f(x,y)$ en la que el plano tangente es $3x-2y+z=3$. Sea C la curva de nivel de f que pasa por el punto $(1,-1)$. ¿Cuál es la recta tangente a C en el punto $(1,-1)$?

Ejercicio 5. En un cruce de tres carreteras, la primera va en dirección norte y tiene una pendiente de subida del 10\%, la segunda va en dirección suroeste y tiene una pendiente de bajada del 5\% y la tercera es horizontal. ¿En qué dirección va la tercera?

Ejercicio 6. Dado el campo escalar $f(x,y)=x^3y^2+\operatorname{sen}(x+y)$, se pide:

1. Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P=(1,\,-1,\,1)$.
2. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por $A=(1,\,-1)$.
3. Determina las direcciones $\vec{\mathbf{u}}$ para las que se tiene $D_{\vec{\mathbf{u}}}f(1,\,-1)=4$.
4. Halla las ecuaciones en forma continua de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $P=(1,\,-1,\,1)$ según las direcciones obtenidas en el apartado (3).

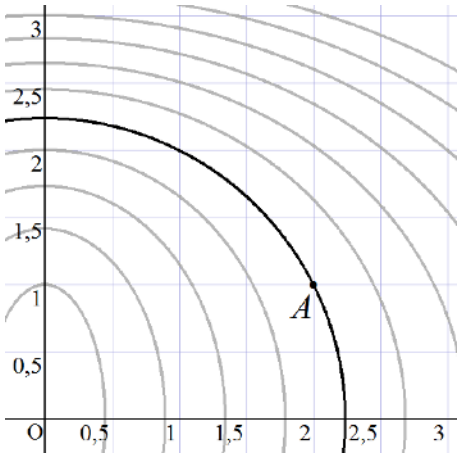
Ejercicio 7. De la gráfica $z=f(x,\,y)$ de un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ se sabe que su plano tangente en el punto $P=(1,\,2,\,z_0)$ viene dado por la ecuación $3x-2y+2z=4$.

1. Calcula z_0.
2. Determina las direcciones $\vec{\mathbf{u}}$ para las que $D_{\vec{\mathbf{u}}}f(1,\,2)=2$.
3. Determina si la recta tangente a la gráfica de f en el punto P y en la dirección dada por el vector $\vec{\mathbf{v}}=\left(\sqrt{2}/2,\,-\sqrt{2}/2\right)$ pasa por el punto $Q=(0,\,1,\,3)$.
4. Sea C la curva de nivel de f que pasa por el punto $A=(1,\,2)$. Halla la ecuación de la recta tangente a C en el punto A.

Ejercicio 8. Sean f el campo escalar dado por $f(x,\,y)=\sqrt{(x-1)(y+2)}$ y P el punto dado por $P=(4,\,1,\,3)$.

1. Halla el dominio U de f y determina su frontera y sus puntos interiores.
2. Calcula las direcciones unitarias $\vec{\mathbf{u}}$ para las que se tiene $D_{\vec{\mathbf{u}}}f(4,\,1)=7/10$.
3. Halla las ecuaciones continuas de las rectas que son tangentes a la gráfica de f en el punto P según las direcciones obtenidas en el apartado anterior.
4. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto P y comprueba que dicho plano contiene a las rectas btenidas en el apartado anterior.

Ejercicio 9. La figura muestra diversas curvas de nivel de una superficie $z=f(x,y)$; la más oscura es la que pasa por el punto $A=(2,1)$. Del campo $f(x,y)$ se sabe que $P=(2,1,6)$ está en dicha superficie y que el plano tangente en P viene dado por $z=a+2x+y$.



1. ¿Cuánto vale el nivel en la curva de nivel que pasa por A?
2. ¿Cuánto vale a?
3. ¿Cuál es el gradiente de f en $A=(2,1)$? Dibújalo en la figura
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en el punto A?

Ejercicio 10. Sea $f(x,y)$ un campo escalar diferenciable en el punto $A=(-1,0)$. Sabemos que el plano tangente a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ en el punto $P=(-1,0,f(A))$ viene dado por la ecuación $2x-y+2z+4=0$. Sea $\vec{\mathbf{u}}=(\sqrt{3}/2,-1/2)$.

1. Calcula $f(A)$ y la derivada direccional $D_{\vec{\mathbf{u}}}f(A)$.
2. Halla la recta tangente a la gráfica de f en P según la dirección $\vec{\mathbf{u}}$.
3. Halla la máxima de las derivadas direccionales de f en A.

Ejercicio 11. Las rectas R_1 y R_2 dadas en forma continua por

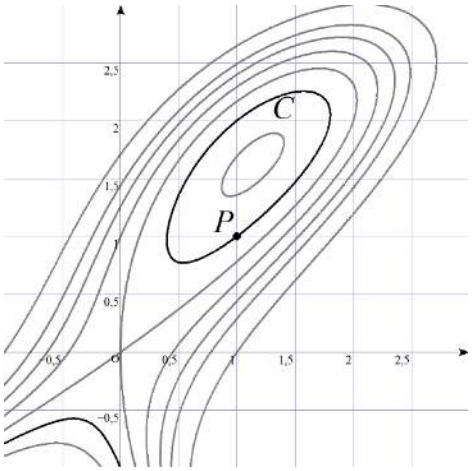
$$R_1\equiv x=y=\frac{z+2}{5}\qquad\text{y}\qquad R_2\equiv x=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{4}$$

se cortan en un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ de la gráfica de un campo escalar $f(x,y)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y, además, ambas están contenidas en el plano tangente en P a dicha gráfica.

Halla el punto P y la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto \)P \).
Halla el gradiente de f en el punto (x_0,y_0).

Halla una dirección unitaria $\vec{\mathbf{u}}_1$ que cumpla lo siguiente: la recta tangente a la gráfica de f en el punto P y en la dirección $\vec{\mathbf{u}}_1$ es la recta R_1.
Halla la ecuación de la recta normal a la curva de nivel de f que pasa por el punto (x_0, y_0).

Ejercicio 12. En la figura se muestran diversas curvas de nivel del campo escalar f definido por $f(x,y) = 5x^2 - 7xy + y^3$ y el punto $P = (1,1)$.



Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $Q = \big(1, 1, f(P)\big)$.
Halla la dirección $\vec{\mathbf{u}}$ en la que la derivada direccional de f en P es máxima, calcula este valor máximo y dibuja el vector $\vec{\mathbf{u}}$ en la imagen (situando su origen en P).
Halla todas las posibles direcciones $\vec{\mathbf{v}}$ en las que se cumple que $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(P) = 3$ y dibuja dichos vectores $\vec{\mathbf{v}}$ en la imagen (situando su origen en P).
En la figura, la curva C (de color más oscuro) es la curva de nivel que pasa por el punto $P = (1,1)$. Halla la ecuación de la recta tangente a C en$P$.

***Ejercicio 13.** Prueba el teorema del valor medio para el gradiente, que establece lo siguiente: Dado un campo escalar f de clase C^1 en su dominio U, sean A y B puntos interiores de U de forma que el segmento que une A con B está contenido en U. Entonces existe un punto C en dicho segmento tal que $f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot (B - A)$. (Indicación: Parametriza el segmento y aplica el teorema del valor medio para funciones de una variable y la regla de la cadena.)

1.6. Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

1.7. El teorema de Taylor

Polinomios de Taylor

En las asignaturas dedicadas al cálculo en una variable habrás estudiado que los polinomios de Taylor se introducen para obtener aproximaciones de los valores de una función de una variable cerca de un punto dado que sean mejores que las dadas por la recta tangente. Recordemos que el polinomio de Taylor p_n de grado n de una función f en un punto a se construye sabiendo que es el único polinomio de grado n en el que coinciden su valor y el de sus derivadas hasta orden n con el valor de la función y de sus derivadas correspondientes en dicho punto, o sea, $p_n(a) = f(a), p_n'(a) = f'(a), p_n''(a) = f''(a), \ldots, p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Análogamente, para campos escalares de varias variables, los polinomios de Taylor se definen como los polinomios para los que coinciden, en un punto dado, su valor y los de sus derivadas parciales con el valor de la función y los de sus derivadas parciales correspondientes. Su utilidad principal también es la de proporcionar valores aproximados de un campo escalar cerca de dicho punto mejores que las aproximaciones dadas por el plano tangente; que dichas aproximaciones son buenas viene garantizado por el teorema de Taylor, que nos dirá cómo es el error que se comete. Este teorema será también una de las herramientas que usaremos más adelante para la determinación de máximos y mínimos de funciones de varias variables.

En esta sección vamos a trabajar únicamente con dos variables y estudiaremos los polinomios de Taylor de grado 1y grado 2por comodidad y razones de espacio; es muy fácil extender la formulación para el caso de tres variables, lo que se deja como ejercicio, o para grado mayor que 2.

Polinomio de Taylor de grado 1 de un campo escalar. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables y sea (a, b)un punto interior del dominio U. Si f es de clase $C^1(U)$, el polinomio de Taylor de grado 1 de f en (a, b) es

$$p_1(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Observemos que $z = p_1(x, y)$ es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b). Si escribimos $A = (a, b)$, $X = (x, y)$, entonces $p_1(X) = f(A) + Df(A)(X - A)$, que es la misma estructura que tiene el polinomio de Taylor para funciones de una variable. De hecho, es fácil ver que el polinomio de Taylor de grado 1 de f en (a, b) es el único polinomio de grado 1 que cumple que el valor del polinomio y de sus derivadas parciales primeras coinciden con los de f en (a, b).

La función $r_1(x, y) = f(x, y) - p_1(x, y)$ se llama resto de Taylor de orden 1 de f y sabemos, el resto es lo que aparece en el numerador de la condición de diferenciabilidad, que la aproximación es buena cerca del punto (a, b); concretamente,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r_1(x, y)}{\|(x - a, y - b)\|} = 0.$$

Como en el caso de funciones de una variable, es posible dar una expresión del resto en términos de las derivadas parciales segundas, pero estos va más allá de los objetivos del curso.

Polinomio de Taylor de grado 2 de un campo escalar. Si $f \in C^2(U)$ entonces podemos mejorar la aproximación lineal obtenida con el plano tangente mediante un polinomio de grado 2 usando la forma cuadrática generada por matriz hessiana de f, dada por $D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$. Se define el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $A = (a, b)$ como

$$p_2(X) = f(A) + Df(A)(X - A) + \tfrac{1}{2}(X - A)^T D^2 f(A)(X - A)$$

o, de forma extendida, como

$$p_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2.$$

De nuevo, es fácil ver que el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $A = (a, b)$ es el único polinomio de grado 2 en dos variables tal que su valor y los de sus derivadas parciales primeras y segundas coinciden con los de f en A.

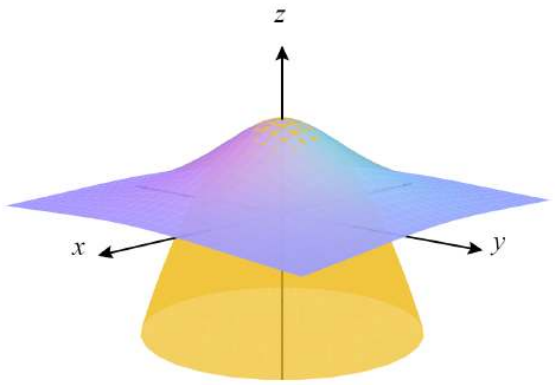
Teorema de Taylor para un campo escalar. La diferencia $r_2(x, y) = f(x, y) - p_2(x, y)$ se llama resto de Taylor de orden 2 de f y cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r_2(x,y)}{\|(x-a,y-b)\|^2} = 0.$$

[Idea para una *demostración: dado $X=(x,y)$ cerca de $A=(a,b)$, se parametriza el segmento que une Xcon A, por ejemplo, mediante $\vec{\mathbf{r}}(t) = A + t(X-A)$ con $0 \le t \le \(1 \)$, y se aplica el teorema de Taylor para una variable a la función $\psi(t) = f(\vec{\mathbf{r}}(t)$ usando la regla de la cadena.]

La expresión obtenida nos da garantías de que si (x,y) está suficientemente cerca de (a,b), entonces la aproximación de $f(x,y) \approx p_2(x,y)$ es muy buena. Geométricamente, la gráfica del polinomio de grado 2 es una cuádrica (generalmente un paraboloide elíptico o hiperbólico) que, en consecuencia, se aproxima bien a la gráfica de f cerca del punto $\big(a,b,f(a,b)\big)$.

En el dibujo vemos la gráfica del campo $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ (en malva) y el paraboloide (en amarillo) que es la gráfica de su polinomio de Taylor de grado 2 en el origen $p_2(x,y) = 1-x^2-y^2$.



La superficie $z = (1+x^2+y^2)^{-1}$ y el paraboloide $z = p_2(x,y) = 1-x^2-y^2$.

Exigiendo la igualdad de las derivadas parciales terceras, cuartas, ..., pueden construirse los polinomios de Taylor de grado $3, 4, \ldots$, con los que, si es necesario, se pueden ir mejorando las aproximaciones.

Observaciones prácticas. Para calcular los polinomios de Taylor debemos, en principio, hallar las derivadas parciales en el punto y construir el polinomio usando la fórmula correspondiente. Sin embargo, podemos ahorrarnos algunos cálculos mediante las siguientes observaciones.

1. Suele ser más cómodo calcular los polinomios de Taylor en el origen. Si queremos hallar el polinomio de Taylor p de f en un punto $(a,b) \neq (0,0)$, se puede proceder de la siguiente manera: empezamos haciendo el cambio de variables $u = x-a$ y $v = y-b$, luego calculamos el polinomio de Taylor $q(u,v)$ de $g(u,v) = f(u+a, v+b)$ en el origen y, finalmente, obtenemos p deshaciendo el cambio de variables $p(x,y) = q(x-a, y-b)$.
2. Si $f(x,y)$ es un polinomio de grado tres o superior, entonces el polinomio de Taylor de grado 2 de f en el origen se calcula suprimiendo de la expresión de f los términos de orden superior. Por ejemplo, para hallar el polinomio de grado 2 de $f(x,y) = 1-2x+y+xy-2y^2+x^3-3x^2y-xy^2$ en el origen, suprimimos los términos de grado 3 y obtenemos $p_2(x,y) = 1-2x+y+xy-2y^2$.
3. Si en la expresión de f aparecen funciones de una variable, podemos usar sus polinomios de Taylor. Por ejemplo, para hallar el polinomio de Taylor de grado 2de $f(x,y) = e^{x+y}\,\mathrm{sen}(x-y)$ en el origen, usamos que $1+t+t^2/2$ es el polinomio de Maclaurin grado 2de e^t y que t es el polinomio de Maclaurin grado 2de $\mathrm{sen}(t)$. Sustituyendo $t = x+y$ en el polinomio de Maclaurin de e^t y $t = x-y$ en el del $\mathrm{sen}(t)$ (en ambos casos $t=0$ si $x=y=0$), obtenemos

   $$\big(1+(x+y)+(x+y)^2/2\big)\,(x-y) = x-y+x^2-y^2+\frac{x^3+x^2y-xy^2-y^3}{2}.$$

   Finalmente, suprimimos los términos de orden superior a 2 y obtenemos que el polinomio de Taylor de grado 2de $f(x,y) = e^{x+y}\,\mathrm{sen}(x-y)$ es $p_2(x,y) = x-y+x^2-y^2$.

EJERCICIOS

En los ejercicios 1, 2 y 3, utiliza la aplicación CalcPlot3D para dibujar la gráfica de la función que se da y la del polinomio de Taylor obtenido; observa que cerca del punto practicamente se confunden.

Ejercicio 1. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y) = 1 + (x+y)e^y$ en el origen.

Ejercicio 2. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y) = y^2/x^3$ en el punto $(1,-1)$.

Ejercicio 3. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 de los siguientes campos en $(0,0)$ y en $(1,1)$.

(1) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$
(2) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)(x^2-2y)$
(3) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3x^2y + y^3 + e^x\cos(y)$
(4) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(\pi y) + y\,\mathrm{sen}(\pi x)$
(5) $f(x,y) = \mathrm{sen}(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y))$
(6) $f(x,y) = xy/(1+x^2+y^2)$
(7) $f(x,y) = 1 + 2x - y + x^2 + y^2 + 2xy + 3x^3 - x^2y$
(8) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

Ejercicio 4. Sea $f(X)$ un campo escalar de tres variables $X = (x,y,z)$ de clase $C^2(U)$ y sea $A = (a,b,c)$ un punto interior de U.

1. El polinomio de Taylor de grado 1 de f en A es el único polinomio $p_1(X)$ de grado 1 en tres variables que cumple que el valor del polinomio y de sus derivadas parciales primeras coinciden con los de f en A. Prueba que p_1 viene dado por la aproximación lineal dada por la diferencial: $p_1(X) = f(A) + Df(A)(X-A)$.
2. El polinomio de Taylor de grado 2 de f en A es el único polinomio $p_2(X)$ de grado 2 en tres variables que cumple que el valor del polinomio, de sus derivadas parciales primeras y de sus derivadas parciales segundas coinciden con los de f en A. Prueba que p_2 viene dado por $p_2(X) = f(A) + Df(A)(X-A) + \frac{1}{2}(X-A)^T D^2 f(A)(X-A)$.
3. Halla el polinomio de Taylor de grado 2 en el origen y en el punto $(-1,0,1)$ de las siguientes funciones:

$$f_1(x,y,z) = z + y^2 + z\,\mathrm{sen}(\pi z) + \log(1+x+z), \quad f_2(x,y,z) = ze^{x+y}\cos(xz) \quad f_3(x,y,z) = \frac{\cos(xy+\pi z)}{1+xy}.$$

1.7. El teorema de Taylor is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

2. ECUACIONES IMPLÍCITAS

A lo largo de tus estudios previos de matemáticas te han ido apareciendo ejemplos de curvas planas definidas como los puntos (x, y) que cumplen una cierta ecuación $f(x, y) = 0$ que establece una relación entre las variables x e y. El ejemplo más conocido es la circunferencia de radio $a > 0$, dada por la ecuación implícita $f(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Otros ejemplos son las cónicas, las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales de variables separadas o las curvas de nivel de un campo escalar. Dichas curvas reciben el nombre de curvas definidas implícitamente y la ecuación $f(x, y) = 0$ se llama ecuación implícita de la curva.

En 3D, ejemplos típicos de superficies dadas de forma implícita son el plano, dado en general por la ecuación $ax + by + cz = d$, la esfera de centro el origen y radio ρ, dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, o el cilindro recto de radio r, dado por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. En otro orden de cosas, si un plano $ax + by + cz = d$ y una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ se cortan, el resultado es una circunferencia que viene dada por dos ecuaciones implícitas, la del plano y la de la esfera.

En estos ejemplos sabemos que, efectivamente, las ecuaciones definen, respectivamente, curvas en 2D y superficies o curvas en 3D, pero ¿es así en general?, es decir, ¿las soluciones de una ecuación $f(x, y) = 0$ forman siempre una curva en 2D?, ¿las soluciones de una ecuación $f(x, y, z) = 0$ forman siempre una superficie en 3D?, ¿las soluciones de un sistema de dos ecuaciones $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ forman siempre una curva en 3D? Las condiciones que nos dan respuesta afirmativa a estas preguntas se conocen, genéricamente, como teoremas de la función implícita. Estos teoremas, como veremos, son locales, es decir, dan respuesta positiva pero cerca de un punto, no de forma global.

Dedicamos este Capítulo **2. ECUACIONES IMPLÍCITAS** a responder estas preguntas en 2D y 3D mediante diversas versiones del teorema de la función implícita. En la primera sección, 2.1. Curvas definidas implícitamente en el plano, nos centraremos en el caso bidimensional, estudiando las condiciones que garantizan que de una ecuación $f(x, y) = 0$ podemos despejar una de las variables en función de la otra, por ejemplo $y = y(x)$, de forma que las soluciones de la ecuación implícita coincidan con los puntos de la curva explícita $y = y(x)$. Como en la práctica suele ser imposible obtener la expresión explícita, la fórmula, de $y(x)$, veremos el procedimiento de derivación implícita para calcular las derivadas de $y'(x), y''(x), \ldots$, y, por ejemplo, poder construir sus polinomios de Taylor en un punto.

En la segunda sección, 2.2. Superficies definidas implícitamente en el espacio, pasamos al caso tridimensional estudiando las condiciones que garantizan que de una ecuación con tres variables $f(x, y, z) = 0$ podemos despejar una de las variables en función de la otras dos y cómo, mediante derivación implícita, calcular las derivadas parciales de esta función cuando no sea posible, en la práctica, obtener su expresión como una superficie explícita.

Finalmente, en la sección 2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio, estudiamos el caso de dos ecuaciones con tres variables $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ analizando cuándo podemos despejar dos de las variables en función de la tercera, que podríamos usar como parámetro de la curva que forman las soluciones de dicho sistema, y cómo calcular las derivadas de estas funciones.

Aquí puedes enlazar directamente con el contenido de las secciones.

Curvas definidas implícitamente en el plano

Superficies definidas implícitamente en el espacio

Curvas definidas implícitamente en el espacio

Breves notas históricas

René Descartes fue el primero, en 1637, que trabajó con cónicas definidas de forma implícita para calcular las rectas tangentes. Isaac Newton y Gottfired W. Leibniz, a finales del siglo XVII , y los matemáticos del siguiente siglo trabajaron con curvas más generales definidas de forma implícita $F(x, y) = 0$, asumiendo con toda naturalidad que se puede despejar y en función de x como una función $y = y(x)$ para hallar el desarrollo de Taylor de $y(x)$. A caballo entre los siglos XVIII y XIX, Joseph Louis Lagrange y Augustin L. Cauchy dieron los primeros resultados de existencia de la función $y = y(x)$ para funciones que se pueden escribir como series de potencias. El resultado general conocido como teorema de la función implícita, que estudiamos aquí para casos especiales, fue finalmente probado por el matemático italiano Ulisse Dini en 1878.

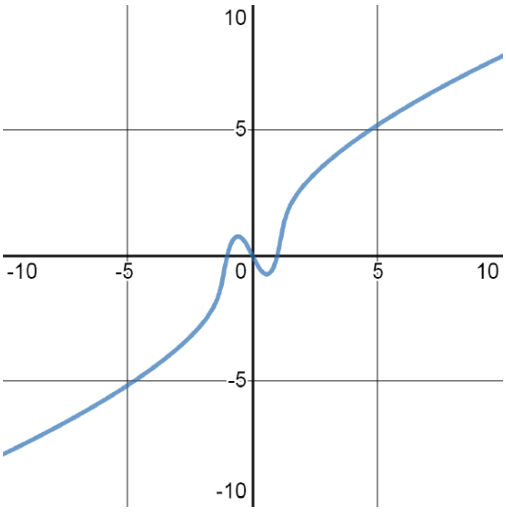
2. ECUACIONES IMPLÍCITAS is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

2.1. Curvas definidas implícitamente en el plano

Planteamiento del problema

A lo largo de tus estudios previos de matemáticas has ido viendo, fundamentalmente, curvas dadas por una ecuación $y = y(x)$, pero también te has encontrado con ejemplos de curvas planas definidas como los puntos (x, y) que cumplen una cierta ecuación $F(x, y) = 0$ que establece una relación entre las variables x e y. Dichas curvas reciben el nombre de curvas definidas implícitamente y la ecuación $F(x, y) = 0$ se llama ecuación implícita de la curva. El ejemplo más habitual es la circunferencia de radio $r > 0$, dada por la ecuación implícita $x^2 + y^2 = r^2$ o, de forma equivalente, $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Otros ejemplos son las cónicas, las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales de variables separadas o las curvas de nivel de un campo escalar.

Para la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ habrás visto que, según convenga, se puede trabajar con esta ecuación despejando una de las variables en función de la otra o hallando una parametrización, pero eso puede ser muy complicado o imposible en otros casos; veamos un ejemplo. Si consideramos la ecuación $F(x, y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ y utilizamos una aplicación como Desmos, u otra similar, para dibujar la curva formada por los puntos (x, y) que cumplen dicha ecuación, obtenemos la siguiente figura.



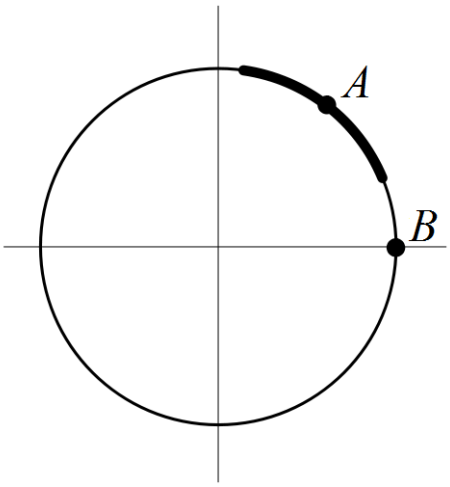
La curva de ecuación $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$.

Aparentemente, es posible representar esta curva en la forma $y = y(x)$. Para hacerlo tendríamos que despejar y de $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$. Observemos que, fijado un valor de x, la ecuación $g(y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ tiene una única solución en y porque $g(y)$ es un polinomio de grado 5, que pasa de negativo cuando $y \to -\infty$ a positivo cuando $y \to +\infty$, y que es estrictamente creciente porque su derivada $g'(y) = 5y^4 + 16$ es estrictamente positiva. Por tanto, la ecuación $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ tiene una única solución que depende del valor de x fijado, digamos $y(x)$ y se dice que la ecuación $F(x, y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ define implícitamente la variable y como función $y(x)$ de la variable x.

Sin embargo que la ecuación $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ tenga una única solución $y(x)$ para cada valor de x no quiere decir que seamos capaces de despejar la y de manera efectiva, o sea, hallar $y(x)$ como una fórmula. Para algunos valores de x aislados, como $x = -1, 0, 1$ sí podemos obtener fácilmente $y(x)$, que vale cero en los tres casos $y(-1) = y(09 = y(1) = 0$. En otros puntos, para hallar $y(2)$ por ejemplo, sustituimos $x = 2$ en la ecuación, que nos queda $y^5 + 16y - 192 = 0$ y se puede resolver con el método de Newton, obteniendo $y \approx 2.72$. Esto nos permite determinar valores aproximados de $y(x)$ en puntos concretos pero, como decíamos, esta forma de trabajar no nos sirve para usar $y(x)$ como una función definida mediante una fórmula que podamos derivar o integrar.

En este ejemplo vemos que en todos los puntos de la curva se puede despejar y en función de x. Esto no siempre es así: la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es el caso típico de curva definida implícitamente en la que no es posible despejar una de las variables para representar toda la circunferencia mediante una ecuación del tipo $y = y(x)$ o una del tipo $x = x(y)$; como mucho, podemos aspirar a representar así un trozo de la circunferencia. Por ejemplo, cerca del punto $A = (0.6, 0.8)$ podemos despejar la y para obtener $y = \sqrt{1 - x^2}$ y se dice que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define implícitamente la variable y como función de x cerca del punto A. Asimismo, cerca de A podemos despejar $x = \sqrt{1 - y^2}$ como función de y. Sin embargo, hay puntos en

los que solamente podemos despejar una de las variables como función de la otra. Por ejemplo, por ambos lados del punto $B=(1,0)$ sólo podemos despejar la x en función de la y pero no la y en función de la x.



A ambos lados del punto A se puede despejar $y=\sqrt{1-x^2}$; a ambos lados del punto B no se puede.

Un problema más delicado a la hora de analizar si las soluciones de una ecuación $F(x,y)=0$ forman una curva es que no siempre ocurre así. Por ejemplo, la ecuación $x^2+y^2=0$ representa un punto, mientras que las soluciones de $x^2-y^4=0$ forman dos parábolas que se tocan en el origen. En este último caso, si bien las soluciones no forman globalmente una curva explícita $y=y(x)$, sí se puede decir que las soluciones de la ecuación $x^2-y^4=0$ que están lo suficientemente cerca del punto $A=(-1,1)$ sí forman, al menos, un tramo de curva, el tramo de la parábola dada por $y=x^2$ con, digamos, $-1.5<x<-0.5$. Es decir, la respuesta a la pregunta de si las soluciones de una ecuación $F(x,y)=0$ forman una curva dada explícitamente (bien por $y=y(x)$, bien $x=x(y)$) puede ser negativa de forma global, viendo todas las soluciones como un conjunto del plano, pero afirmativa de forma local, viendo solo las soluciones que están cerca de un punto.

Un segundo problema es que pudiera ser posible despejar $y=y(x)$ de $F(x,y)=0$ (al menos cerca de un punto) pero no, en la práctica, encontrar la fórmula $y(x)$ explícitamente, como en el ejemplo $y^5+16y-32x^3+32x=0$ visto antes. Estudiaremos en esta sección cómo podemos calcular las derivadas de dichas funciones explícitas para poder generar sus polinomios de Taylor, por ejemplo.

En las siguientes secciones extenderemos nuestro estudio del caso plano al caso tridimensional en el que tenemos las variables x,y,z ligadas por una ecuación, como en el caso de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, o bien dos ecuaciones, como en el caso de la curva de Viviani, dada por las ecuaciones $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2=y$.

Observación clave. La propiedad de normalidad del gradiente que vimos en la Sección 1.6 nos da la pista para ver qué es razonable exigir como condición para que $F(x,y)=0$ represente una curva y podamos hallar sus elementos principales. Dada una función escalar de dos variables $F(x,y)$ de clase C^1, consideremos la ecuación $F(x,y)=0$, que podemos ver como la curva de nivel 0 del campo F. Si cerca de un punto (x,y) que cumple la ecuación pudiéramos despejar $y=y(x)$ como función derivable de x, entonces la curva de nivel sería en ese tramo una curva regular y $\big(1,y'(x)\big)$ sería un vector tangente a la curva. Por la propiedad de normalidad del gradiente, se tendría que $F_x\big(x,y(x)\big)+y'(x)F_y\big(x,y(x)\big)=0$, con lo cual $y'(x)=-F_x\big(x,y(x)\big)/F_y\big(x,y(x)\big)$, así que exigir $F_y\neq 0$ es una condición natural. Esta condición equivale a que la tangente no sea vertical, lo que en el ejemplo de la circunferencia visto antes corresponde exactamente a que podamos despejar y en función de x cerca del punto. El teorema de la función implícita asegura que eso es cierto en general.

Teorema de la función implícita para una curva en el plano o para una ecuación con dos variables.

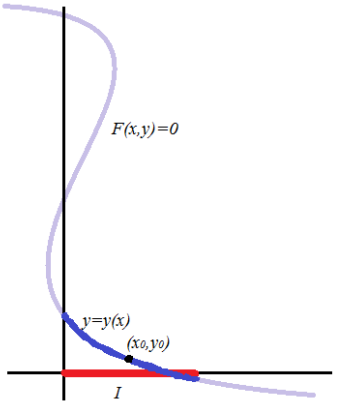
Teorema de la función implícita (2D). Sea $F(x,y)$ una función de clase C^n en una región U del plano. Sea (x_0,y_0) un punto interior del dominio U tal que $F(x_0,y_0)=0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Entonces existen un intervalo I centrado en el punto x_0 y una única función $y:I\to\mathbb{R}$ de clase $C^n(I)$ tal que $y(x_0)=y_0$ e $y=y(x)$ es una solución de la ecuación $F(x,y)=0$ para cada $x\in I$, o sea, $F\big(x,y(x)\big)=0$ para cada $x\in I$. Además, usando la regla de la cadena, la derivada y' viene dada por

$$y'(x) = -\frac{\partial F\big(x, y(x)\big)}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F\big(x, y(x)\big)}{\partial y} \qquad \text{para cada } x \in I.$$

Se dice, en este caso, que **la ecuación $F(x,y)=0$ define implícitamente la variable y como función de x cerca del punto (x_0, y_0)**.

[Idea para una *demostración de la existencia de la función: Supongamos, por ejemplo, $F_y(x_0, y_0) > 0$. Usando la continuidad $F_y(x,y) > F_y(x_0,y_0)/2 > 0$ para (x,y) cerca de (x_0,y_0) luego $F(x_0,y)$ es estrictamente creciente como función de y y para algún $delta$ pequeño y $F(x_0, y-delta) < 0 < F(x_0, y+delta)$. Por continuidad, $F(x, y-delta) < 0 < F(x, y+delta)$ para (x,y) cerca de (x_0,y_0) y, fijo x, la ecuación $F(x,y)=0$ tiene solución única porque $F(x,y)$ es estrictamente creciente como función de y ya que $F_y(x,y) >> 0$.]

Geométricamente, este teorema establece que las soluciones de $F(x,y)=0$ (en color violeta en la figura) forman cerca de (x_0,y_0) una curva que coincide con la gráfica de la función $y(x)$ (en azul en la figura).



Interpretación geométrica del teorema de la función implícita.

Ecuación de la recta tangente a una curva dada por una ecuación implícita. La recta tangente a la gráfica de la curva $y = y(x)$ en el punto $A = (x_0, y_0)$ viene dada por $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, ecuación que, usando $y'(x_0) = -F_x(A)/F_y(A)$ e $y(x_0) = y_0$, podemos escribir como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0.$$

Observemos en particular que, como ya sabíamos, $\nabla F(A)$ es un vector perpendicular a la curva definida por $F(x,y)=0$ en el punto A.

El papel de la incógnita que se despeja es intercambiable, o sea, se puede enunciar, lo que se deja como ejercicio, un teorema similar que nos da condiciones, la esencial es que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, que garantizan que podemos despejar x en función de y cerca de (x_0, y_0).

Puntos críticos. Los puntos donde ambas derivadas parciales se anulan se llaman puntos críticos y en ellos no podemos asegurar que la ecuación implícita represente una curva. Veremos en la siguiente lección que los puntos en los que un campo alcanza sus máximos y sus mínimos relativos son, precisamente, puntos críticos.

Procedimiento de derivación implícita.

Derivadas de orden superior de la función implícita. Una observación práctica importante es que si F admite derivadas parciales de orden superior, entonces, usando la regla de la cadena, podemos calcular derivadas de orden superior de $y(x)$ para, por ejemplo, determinar los polinomios de Taylor de y centrados en x_0, lo cual es muy útil si es imposible o muy complicado encontrar la fórmula $y(x)$.

Para ello, una vez que ya sabemos que existe la función $y(x)$ definida en el intervalo I que cumple $y(x_0) = y_0$ y $F\big(x, y(x)\big) = 0$ para todo $x \in I$, podemos derivar esta expresión con respecto a su variable independiente x usando la regla de la cadena, obteniendo (como vimos en la observación clave entes del teorema),

$$F_x\big(x,y(x)\big)+F_y\big(x,y(x)\big)\cdot y'(x)=0, \qquad \text{para todo } x\in I.$$

Usando que para $x=x_0$ tenemos $y(x_0)=y_0$ obtenemos el valor de $y'(x_0)$. Si volvemos a derivar con respecto a x la expresión anterior, tenemos

$$F_{xx}\big(x,y(x)\big)+F_{xy}\big(x,y(x)\big)\cdot y'(x)+\big[F_{xy}\big(x,y(x)\big)+F_{yy}\big(x,y(x)\big)\cdot y'(x)\big]\cdot y'(x)+F_y\big(x,y(x)\big)\cdot y''(x)=0,$$
$$\text{para todo } x\in I,$$

de donde podemos obtener $y''(x_0)$ poniendo $x=x_0$ y usando los valores ya obtenidos $y(x_0)=y_0$ e $y'(x_0$. Repitiendo este procedimiento, llamado derivación implícita, sucesivamente podríamos obtener las derivadas tercera, cuarta, ..., de la función $y(x)$ en el punto x_0.

No hace falta recordar esta igualdad de memoria; la manera práctica de utilizar el procedimiento es ir derivando con respecto a x en la expresión dada $F\big(x,y(x)\big)=0$ usando que $y=y(x)$ es función de x como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Si tomamos $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$, como $F_y(A)=1.6\neq 0$, el teorema nos dice que cerca del punto $A=(0.6,0.8)$ de la circunferencia $x^2+y^2=1$ podemos despejar la variable y como función $y=y(x)$ de la variable x, de manera que $x^2+\big(y(x)\big)^2=1$ para todo x en un intervalo I centrado en $x_0=0.6$.

Esto ya lo sabíamos, por supuesto; de hecho, $y(x)=\sqrt{1-x^2}$. Pero continuemos como si no supiéramos esto. Derivando $x^2+\big(y(x)\big)^2=1$ con respecto a x, nos queda $2x+2y(x)y'(x)=0$ para todo $x\in I$. Entonces, sustituyendo $x=0.6$ e $y(0.6)=0.8$, tenemos $y'(0.6)=-0.6/0.8=-0.75$. Con estos datos ya podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $y=0.8-0.75(x-0.6)$.

Ahora, derivando implícitamente con respecto a x en $2x+2y(x)y'(x)=0$, obtenemos $2+2(y'(x))^2+2y(x)y''(x)=0$ para todo $x\in I$, así que $y''(0.6)=\big(-1-(y'(0.6))^2\big)/y(0.6)=-1.95313$. Con estos datos, obtenemos que el polinomio de Taylor de orden 2 de $y(x)$ centrado en $x_0=0.6$ viene dado por $p_2(x)=0.8-0.75(x-0.6)-0.9765563(x-0.6)^2$, sin que hayamos necesitado derivar dos veces la expresión $\sqrt{1-x^2}$.

Ejercicios

Utiliza la aplicación Desmos, u otra similar, para dibujar las gráficas de las curvas que aparecen en los ejercicios.

Ejercicio 1. En los siguientes casos, aplica el teorema de la función implícita para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C, dada por una ecuación implícita, en el punto P.

1. C dada por $x^3y^2-3xy+2=0$ en el punto $P=(1,2)$.
2. C dada por $x^3+y^3=6xy$ en el punto $P=(3,3)$.
3. C dada por $x^2-3xy+2y^3+\cos(x)=\pi^2-1$ en el punto $P=(\pi,0)$.

Ejercicio 2. La ecuación $ay^2+2bxy+cx^2+\alpha x+\beta y=0$ define en el plano una cónica (quizás degenerada) que pasa por el origen. Halla la ecuación de la recta tangente a la cónica en ese punto.

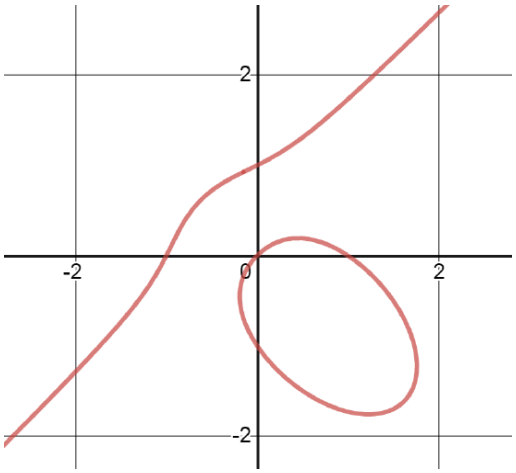
Ejercicio 3. Prueba que la ecuación $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ define y como función implícita de x cerca del punto $P=(0,a)$ y determina el polinomio de Taylor de orden 3 de dicha función (éste es el primer ejemplo usado por Newton en 1669). Haz lo mismo para el punto $Q=(a,a)$.

Ejercicio 4. Prueba que $\operatorname{sen}(y)=x$ define implícitamente la variable y como función de la variable x alrededor de $(0,0)$ y calcula su polinomio de Maclaurin de grado 3 (así obtuvo Newton el polinomio de Taylor de la función $\operatorname{arcsen}(x)$ en 1669). Haz lo mismo pero cerca del punto $(0,\pi)$.

Ejercicio 5. Prueba que la ecuación $y^3+4y-x^4+x=0$ define implícitamente la variable y como función de la variable x en toda la recta real y halla su polinomio de Maclaurin de grado 2.

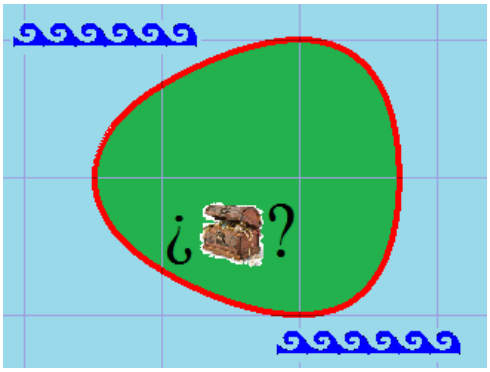
Ejercicio 6. Prueba que la ecuación $y^5+y-2x^3+x=0$ define implícitamente la variable y como función $y(x)$ de la variable x cerca del origen y halla su el polinomio de Maclaurin de grado 3.

Ejercicio 7. Si usas un programa para dibujar la curva dada por $x^3-y^3+2xy-x+y=0$, verás que tiene dos ramas, una cerrada y otra abierta. La curva corta al eje OY en tres puntos $(0,-1)$, $(0,0)$ y $(0,1)$, uno en la rama abierta y los otros dos en la cerrada. Prueba que cerca de cada uno de los puntos $(0,-1)$, $(0,0)$ y $(0,1)$ se puede obtener la variable y como una función de x y calcula el polinomio de Maclaurin de grado 3 de cada una de dichas funciones.



Ejercicio 8. Determina en qué puntos puedes aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $x^3axy+y^3=0$ para asegurar que define implícitamente una de las variables como función de la otra? ?`Qué pasa en el origen? La curva que se obtiene se llama folium de Descartes.

Ejercicio 9. La figura representa la isla en la que el pirata Morgan escondió el tesoro. Fijado un sistema de coordenadas cartesianas en el que las abscisas representan la longitud y las ordenadas la latitud, el contorno de la isla es la curva dada por $x^4-4x+4y^2+y^4=2$



Para encontrar el tesoro debes dar los siguientes pasos:

1. Halla el punto N más septentrional de la isla.
2. Comprueba que en dicho punto la curva define la latitud y como función de la longitud x y halla el polinomio de Taylor de orden 2 de dicha función definida implícitamente.
3. El tesoro está en el punto T de la isla en el que la gráfica de dicho polinomio corta al eje X.
4. Dibuja la localización aproximada de los ejes coordenados, los puntos N y T y la gráfica del polinomio de Taylor mencionado.

***Ejercicio 10.** El teorema de la función implícita no puede aplicarse en el origen de coordenadas a las siguientes ecuaciones porque en cada caso se tiene que es un punto crítico. ¿En qué casos es posible despejar una de las variables como una función de la otra cerca de dicho punto?

$$F_1(x,y)=x^2-y^2=0, \qquad F_2(x,y)=x^2-y^3=0, \qquad F_3(x,y)=x^3-y^3=0.$$

***Ejercicio 11.** La ecuación $y-\epsilon\,\mathrm{sen}(y)=m$ se llama ecuación de Kepler y relaciona varios parámetros importantes que caracterizan el movimiento orbital de un planeta. En esta ecuación, y es la anomalía excéntrica; ϵ, que es un número pequeño, es la excentricidad de la órbita elíptica; y m es la anomalía media.

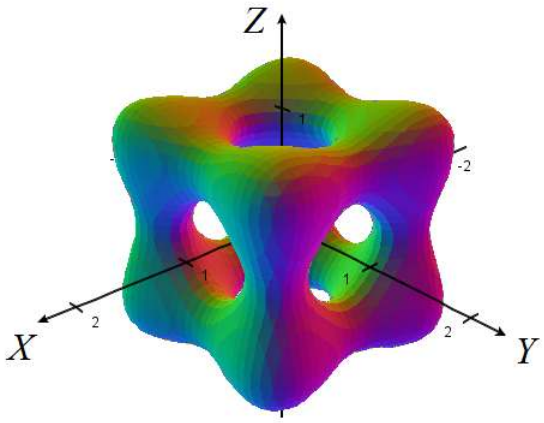
1. Suponiendo que ϵ está dado, utiliza el teorema de la función implícita para hallar el polinomio de Maclaurin de grado 3 de $y=y(m)$ como función de m alrededor del punto $(m=0, y=0)$.
2. En otras ocasiones puede interesar, para un valor dado m, hallar y en función de ϵ. Utiliza el teorema de la función implícita en el punto $(\epsilon=0, y=m)$, para hallar el correspondiente polinomio de Maclaurin de grado 3 de $y=y(\epsilon)$.

2.1. Curvas definidas implícitamente en el plano is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

2.2. Superficies definidas implícitamente en el espacio

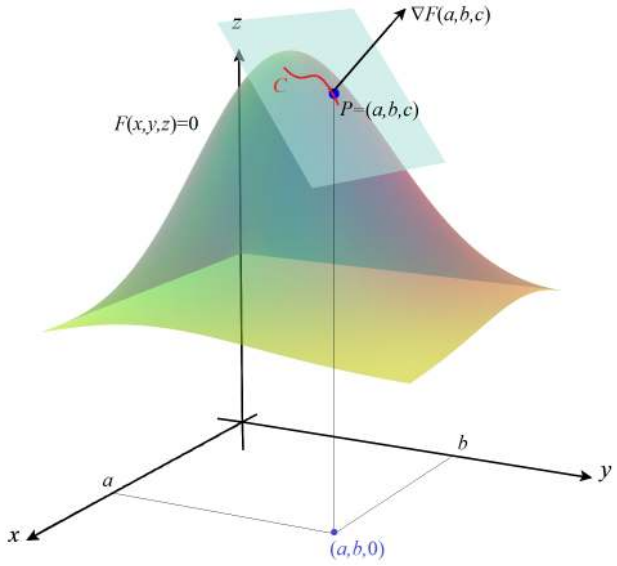
Ecuaciones implícitas en el espacio 3D

Si tenemos un campo escalar de tres variables $F(x,y,z)$, los puntos (x,y,z) que cumplen $F(x,y,z)=0$ forman, en general, una superficie S. Entonces se dice que $F(x,y,z)=0$ es la ecuación implícita de S o que define implícitamente la superficie S. Ya conoces ejemplos de superficies definidas implícitamente, como los planos, dados por ecuaciones de la forma $ax+by+cz+d=0$, la esfera unidad, dada por $x^2+y^2+z^2-1=0$, y las cuádricas. En esta sección estudiamos el problema de ver qué condiciones garantizan que $F(x,y,z)=0$ representa una superficie y si podemos despejar una de las variables en función de las otras dos; por ejemplo, si podemos escribir z en función de x e y para representar la superficie de manera explícita mediante una ecuación $z=z(x,y)$. La aplicación CalcPlot3D permite dibujar superficies dadas por una ecuación implícita introducida desde el teclado, como el dibujo que se muestra a continuación.



La superficie $5(x^4+y^4+z^4)-5(x^2+y^2+z^2)+2=0$.

Plano tangente a una superficie dada de forma implícita. Supongamos que la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente una superficie S. Con la regla de la cadena podemos resolver de una manera sencilla el cálculo del plano tangente a S en un punto $P=(a,b,c)$. Sea C una curva regular parametrizada por $\vec{\mathbf{r}}(t)$, contenida en S y que pasa por $P=\vec{\mathbf{r}}(t_0)$. Como $F\left(\vec{\mathbf{r}}(t)\right)=0$ sobre todos los puntos de C, tenemos $0=\left(F\left(\vec{\mathbf{r}}(t)\right)\right)'=\nabla F(\vec{\mathbf{r}}(t))\cdot\vec{\mathbf{r}}\,'(t)$, lo que para $t=t_0$ queda $\nabla F(P)\cdot\vec{\mathbf{r}}\,'(t_0)=0$. Es decir, el vector $\nabla F(P)$ es ortogonal al vector tangente a la curva en P. Como C es cualquier curva regular contenida en C y que pasa por P, obtenemos que $\nabla F(P)$ es un vector normal al plano tangente a S en P.



Normalidad del diferencial y plano tangente.

Si $\nabla F(P) \neq \vec{\mathbf{0}}$, el plano tangente vendrá dado por $F_x(P)(x-a)+F_y(P)(y-b)+F_z(P)(z-c)=0$. Si pudiéramos despejar $z=z(x,y)$ entonces sabemos que $\big(-z_x,\ -z_y,\ 1\big)$ sería un vector perpendicular al plano tangente a S en el punto P. Como $\nabla f=\big(F_x,\ F_y,\ F_z\big)$ también es perpendicular al plano tangente, ambos vectores deben ser paralelos y, por tanto, comparando sus componentes, tendría que cumplirse $F_z \neq 0$ y, además, $z_x=-F_x/F_z$ y $z_y=-F_y/F_z$. Parece, entonces, que la condición natural ahora es exigir $F_z \neq 0$, es decir, que el plano tangente no sea vertical.

Teorema de la función implícita para una superficie en el espacio o para una ecuación con tres variables

Teorema de la función implícita (3D, una ecuación). Sea $F(x,y,z)$ una función de clase $C^n(U)$ y sea $P=(x_0,y_0,z_0)$ un punto interior de U tal que $F(P)=0$ y $F_z(P)\neq 0$. Entonces existen un círculo $D\subset\mathbb{R}^2$ centrado en (x_0,y_0) y una única función $z: D\to\mathbb{R}$ de clase $C^n(D)$ tales que $z_0=z(x_0,y_0)$ y que $z=z(x,y)$ es una solución de la ecuación $F(x,y,z)=0$ para cada $(x,y)\in D$; o sea, $F\big(x,y,z(x,y)\big)=0$ para cada $(x,y)\in D$. Además, las derivadas parciales de la función $z(x,y)$ vienen dadas por

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial F\big(x,y,z(x,y)\big)}{\partial x}\Bigg/\frac{\partial F\big(x,y,z(x,y)\big)}{\partial z},\qquad \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial F\big(x,y,z(x,y)\big)}{\partial y}\Bigg/\frac{\partial F\big(x,y,z(x,y)\big)}{\partial z}$$
$$\text{para cada } (x,y)\in D.$$

Se dice, entonces, que **la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente la variable z como función de las variables x,y cerca del punto P**. Es decir, las soluciones de la ecuación $F(x,y,z)=0$ forman una superficie que coincide, cerca del punto P, con la gráfica de la función z.

Los papeles de las variables son intercambiables: si $F_x\neq 0$ entonces podemos despejar x en función de y,z, mientras que si $F_y\neq 0$ entonces podemos despejar y en función de x,z.

Procedimiento de derivación implícita

Usando la regla de la cadena podemos derivar implícitamente $F\big(x,y,z(x,y)\big)=0$, de forma parecida a como lo hemos hecho en la sección anterior, para calcular las derivadas parciales sucesivas de $z=z(x,y)$ y determinar sus polinomios de Taylor centrados en (x_0,y_0). Esto nos proporcionará buenas aproximaciones, que pueden ser de utilidad cuando sea imposible obtener $z(x,y)$ como una fórmula explícita en términos de x e y. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. El origen cumple la ecuación $F(x,y,z)=z+\operatorname{sen}(z)+x^2+y^2-6xy=0$. Además, f es un campo escalar de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ para el que se tiene $\nabla F(x,y,z)=\big(2x-6y,2y-6x,1+\cos(z)\big)$, de manera que $\nabla F(0,0,0)=(0,0,2)$ y el teorema de la función implicita nos garantiza que la ecuación $F(x,y,z)=0$ define z como función de x,y en un disco D centrado en el origen y que dicha función $z(x,y)$ es de clase $C^\infty(D)$ y cumple $z(0,0)=0$ y

$$z(x,y)+\operatorname{sen}(z(x,y))+x^2+y^2-6xy=0,\qquad \text{para } (x,y)\in D.$$

Para determinar el polinomio de Taylor de grado 2 de $z(x,y)$ centrado en $(0,0)$ usaremos el procedimiento de derivación implícita. Para ello, empezamos derivando parcialmente con respecto a x en la igualdad anterior (en aras de la claridad, no escribiremos los argumentos (x,y) en las expresiones de las funciones $z, z_x, z_y, \dots$) obteniendo $z_x+z_x\cos(z)+2x-6y=0$ para $(x,y)\in D$. Tomando $x=0, y=0$, como $z(0,0)=0$, nos queda $z_x(0,0)=0$.

Ahora, derivamos parcialmente con respecto a y en $z+\operatorname{sen}(z)+x^2+y^2-6xy=0$, y nos queda $z_y+z_y\cos(z)+2y-6x=0$ para $(x,y)\in D$. De nuevo, tomando $x=0, y=0$ obtenemos $z_y(0,0)=0$.

Para calcular las derivadas segundas $z_{xx}(0,0), z_{xy}(0,0), z_{yx}(0,0), z_{yy}(0,0)$ derivamos implícitamente en las dos expresiones obtenidas al derivar parcialmente. Así, derivando de nuevo parcialmente con respecto a x en la igualdad $z_x+z_x\cos(z)+2x-6y=0$ obtenida antes, tenemos $z_{xx}+z_{xx}\cos(z)-(z_x)^2\operatorname{sen}(z)+2=0$ para $(x,y)\in D$. Usando que para $x=0, y=0$, tenemos $z(0,0)=0, z_x(0,0)=0, z_y(0,0)=0$, nos queda $2z_{xx}(0,0)+2=0$ y, por tanto, $z_{xx}(0,0)=-1$.

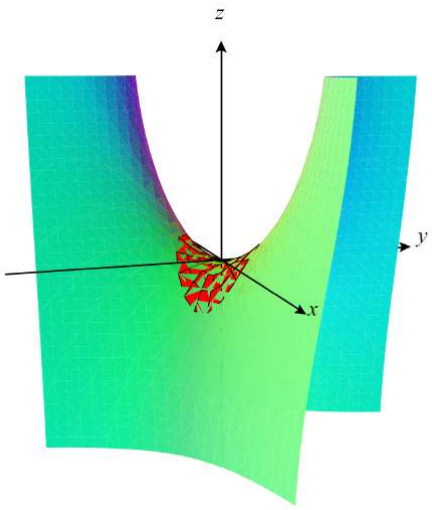
Derivando en la misma expresión $z_x+z_x\cos(z)+2x-6y=0$ pero parcialmente con respecto a y, queda $z_{xy}+z_{xy}\cos(z)-z_xz_y\operatorname{sen}(z)-6=0$ para $(x,y)\in D$. Usando de nuevo que si $x=0, y=0$, entonces $z(0,0)=0, z_x(0,0)=0, z_y(0,0)=0$, obtenemos $2z_{xy}(0,0)-6=0$ y, por tanto, $z_{xy}(0,0)=3$. Como $z(x,y)$ es de clase $C^\infty(D)$, el teorema de igualdad de las derivadas cruzadas nos dice que $z_{yx}(0,0)=3$

Finalmente, derivando parcialmente con respecto a y en la igualdad $z_y + z_y\cos(z) + 2y - 6x = 0$ obtenida antes, resulta $z_{yy} + z_{yy}\cos(z) - (z_y)^2\,\mathrm{sen}(z) + 2 = 0$ para $(x, y) \in D$. Volviendo a usar que si $x = 0, y = 0$, entonces $z(0,0) = 0, z_x(0,0) = 0, z_y(0,0) = 0$, obtenemos, $2z_{yy}(0,0) + 2 = 0$ y, por tanto, $z_{yy}(0,0) = -1$.

Con estos resultados, el polinomio de Taylor de grado 2 de la función implícita $z = z(x, y)$ en el disco D definida por la ecuación $z + \mathrm{sen}(z) + x^2 + y^2 - 6xy = 0$ es

$$p_2(x, y) = z(0,0) + z_x(0,0)x + z_y(0,0)y + \frac{1}{2}z_{xx}(0,0)x^2 + z_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}z_{yy}(0,0)y^2 = 3xy - \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

En el dibujo vemos (en colores fríos) la superficie implícita $z + \mathrm{sen}(z) + x^2 + y^2 - 6xy = 0$ y la gráfica (en rojo) del polinomio de Taylor $p_2(x, y)$ en un disco pequeño centrado en el origen, se parecen tanto que la aplicación mezcla ambas superficies cerca del origen.



La superficie $z + \mathrm{sen}(z) + x^2 + y^2 - 6xy = 0$ y la gráfica del polinomio de Taylor $p_2(x, y)$.

Ejercicios

Utiliza la aplicación CalcPlot3D para dibujar las superficies de los ejercicios y, en su caso, las gráficas de los polinomios de Taylor obtenidos.

Ejercicio 1. En los siguientes casos, prueba que la ecuación que se da define implícitamente una superficie S y calcula el plano tangente a S en el punto P.

1. La ecuación $x^2 + y^2 + 3xz + 3yz + x + y = 0$ y el punto $P = (-1, 0, 0)$.
2. La ecuación $x^3z - z^3yx = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.
3. La ecuación $x^3 - y^3 + 6xy + z^2x = 6$ y el punto $P = (1, 2, 1)$.

Ejercicio 2. Sea $P = (x, y, z)$ un punto del octante positivo (o sea, $x, y, z > 0$) que está en la superficie S dada por la ecuación $xyz = 8$.
Prueba que el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano tangente a la superficie S en P siempre vale 36.

Ejercicio 3. En los siguientes casos, prueba que la ecuación que se da define implícitamente la variable z como una función $z = z(x, y)$ de las
otras variables x, y cerca del punto P y calcula el correspondiente polinomio de Taylor de grado 2 de $z(x, y)$.

1. La ecuación $z^3 + zx^3 + zy^4 + y^2 + 2xy - 2x - 4y + 3 = 0$ y el punto $P = (1, 1, 0)$.
2. La ecuación $x^3 - z^3 - y^2 - yx + 2z^2 = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.
3. La ecuación $z\cos(z) + xy = 0$ y el punto $P = (0, 0, 0)$.
4. La ecuación $xz^3 + z^2y - zy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$ y el punto $P = (0, 1, 1)$.
5. La ecuación $y - x\,\mathrm{sen}(y) = z$ y el punto $P = (0, 0, 0)$.
6. La ecuación $y - x\,\mathrm{sen}(y) = z$ y el punto $P = (0, a, a)$ con $a > 0$.

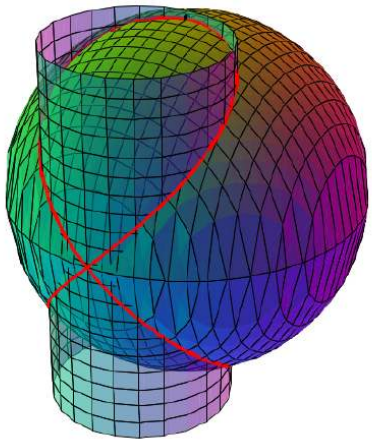
7. La ecuación $x^3y+y^2z^3+zx^2=3$ y el punto $P=(1,-2,1)$.
8. La ecuación $xz-e^zy+1=0$ y el punto $P=(-1,\ 1,\ 0)$.

2.2. Superficies definidas implícitamente en el espacio is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio

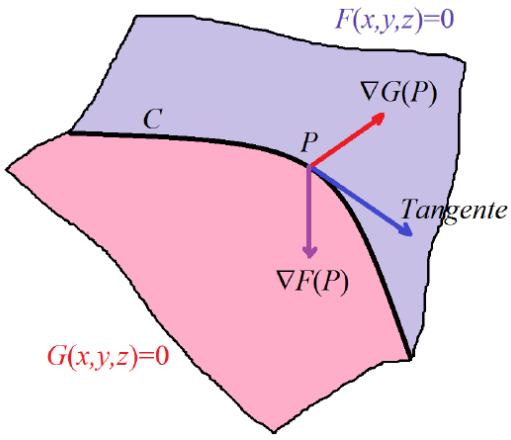
Curvas dadas por la intersección de dos superficies

Dados dos campos escalares $F(x,y,z)$ y $G(x,y,z)$, los puntos (x,y,z) que cumplen $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ forman, en general, una curva C en el espacio tridimensional. Entonces se dice que estas ecuaciones definen implícitamente la curva C y se llaman ecuaciones implícitas de C. El ejemplo más simple es la definición de una recta como intersección de dos planos. Otro ejemplo son las cónicas, definidas en 3D como la intersección de un cono y un plano, o las curvas dadas por la intersección de dos cuádricas, como la curva de Viviani, que es la curva en forma de 8 dada por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el cilindro circular $x^2+y^2=x$, en otras palabras, es el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x,y,z) son las soluciones de las ecuaciones $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ y $G(x,y,z)=x^2+y^2-x=0$.



La curva de Viviani.

Recta tangente a una curva dada por la intersección de dos superficies. Para ver que el conjunto C de los puntos (x,y,z) que cumplen $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ es una curva, lo ideal sería despejar dos de las variables en función de la tercera, que podría usarse como parámetro de la curva. Si C es una curva, entonces está contenida en ambas superficies, luego que el vector tangente a C en un punto P debe ser ortogonal tanto a $\nabla F(P)$ como a $\nabla G(P)$. En consecuencia, el producto vectorial $\nabla F(P)\times\nabla G(P)$ es, si no es el vector nulo, tangente a la curva en P, luego la condición debe ser que $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$ sean linealmente independientes para que $\nabla F(P)\times\nabla G(P)\neq\vec{\mathbf{0}}$.



Curva dada por ecuaciones implícitas.

Teorema de la función implícita para una curva en el espacio o para dos ecuaciones con tres variables.

Teorema de la función implícita (3D, dos ecuaciones). Sean F y G funciones de clase $C^n(U)$ y $P=(x_0,y_0,z_0)$ un punto interior del dominio U tal que $F(P)=0$ y $G(P)=0$. Si los vectores gradientes $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$ son linealmente independientes, entonces cerca del punto P los puntos (x,y,z) que cumplen $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ forman una curva C que podemos parametrizar usando una de las variables como parámetro.

Concretamente, si $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$ son linealmente independientes, entonces $\nabla F(P)\times\nabla G(P)\neq\vec{\mathbf{0}}$ y podemos usar como parámetro de la curva cualquiera de las variables cuya coordenada correspondiente en $\nabla F(P)\times\nabla G(P)$ no sea cero. Así, por ejemplo, si la primera coordenada de $\nabla F(P)\times\nabla G(P)$ no es cero, entonces podemos usar x como parámetro y despejar y,z en función de x cerca de P, en el sentido de que existen un intervalo $I\subset\mathbb{R}$ centrado en el punto x_0 y dos únicas funciones escalares $y(x)$ y $z(x)$ de clase $C^n(I)$ tales que $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$ y $\big(x,y=y(x),z=z(x)\big)$ es una solución del sistema de ecuaciones $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$ para cada $x\in I$. Además, las derivadas $y'(x)$ y $z'(x)$ vienen dadas para cada $x\in I$ por la solución única del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} F_y\big(x,y(x),z(x)\big)y'(x)+F_z\big(x,y(x),z(x)\big)z'(x) &= -F_x\big(x,y(x),z(x)\big)\\ G_y\big(x,y(x),z(x)\big)y'(x)+G_z\big(x,y(x),z(x)\big)z'(x) &= -G_x\big(x,y(x),z(x)\big)\end{aligned} \tag{1}$$

Se dice, en este caso, que **las ecuaciones $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ definen implícitamente las variables y,z como funciones $y(x),z(x)$ de la variable x cerca del punto P.**

En estas condiciones, el trozo de curva C cerca de P podemos parametrizarlo, usando x como parámetro, mediante $\vec{\mathbf{r}}:x\in I\to\vec{\mathbf{r}}(x)=\big(x,y(x),z(x)\big)$. Entonces, un vector tangente a la curva en un punto $\big(x,y=y(x),z=z(x)\big)$ es $\vec{\mathbf{r}}\,'(x)=\big(1,y'(x),z'(x)\big)$ que, como se deduce del sistema de ecuaciones anterior, es ortogonal tanto a ∇F como a ∇G y, por tanto, paralelo al producto vectorial $\nabla F\times\nabla G$, como habíamos adelantado.

Como en los casos de curvas en el plano y de superficies en el espacio, el papel de las variables es intercambiable, de manera que si la segunda coordenada de $\nabla F(P)\times\nabla G(P)$ no es cero, entonces podemos usar y como parámetro y despejar x,z en función de y cerca de P, mientras que si la tercera coordenada de $\nabla F(P)\times\nabla G(P)$ no es cero, entonces podemos usar z como parámetro y despejar x,y en función de z cerca de P.

Procedimiento de derivación implícita

Volviendo al caso en que las ecuaciones $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ definen implícitamente las variables y,z como funciones de la variable x cerca del punto P, el procedimiento de derivación implícita para ir calculando las sucesivas derivadas de $y(x)$ y $z(x)$ consiste en derivar simultáneamente las dos igualdades $F\big(x,y(x),z(x)\big)=0$, $G\big(x,y(x),z(x)\big)=0$ para $x\in I$, sustituir los valores previamente obtenidos y resolver el sistema corrrespondiente. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos la intersección de la superficie dada por $x^2+y^2+z^3=2$ con el plano $x+y+z=2$. El punto $P=(0,1,1)$ está en dicha intersección. Los campos $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^3-2$ y $G(x,y,z)=x+y+z-2$ son de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Además, $\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,3z^2)$ y $\nabla G(x,y,z)=(1,1,1)$ cumplen que $\nabla F(P)=(0,2,3)$ y $\nabla G(x,y,z)=(1,1,1)$ son linealmente independientes y la primera componente de $\nabla F(P)\times\nabla G(P)=(-1,3,-2)$ no es cero, así que el teorema de la función implícita nos dice que las ecuaciones $x^2+y^2+z^3=2$ y $x+y+z=2$ definen implícitamente, cerca del punto $P=(0,1,1)$, una curva C en la que las variables y,z son funciones $y(x),z(x)$ de la variable x que se mueve en un intervalo I centrado en $x_0=0$ y cumplen $y(0)=1,z(0)=1$. Sería muy complicado calcular las expresiones explícitas de estas funciones $y(x),z(x)$, pero podemos calcular sus derivadas en $x_0=1$ y, por tanto, sus polinomios de Maclaurin.

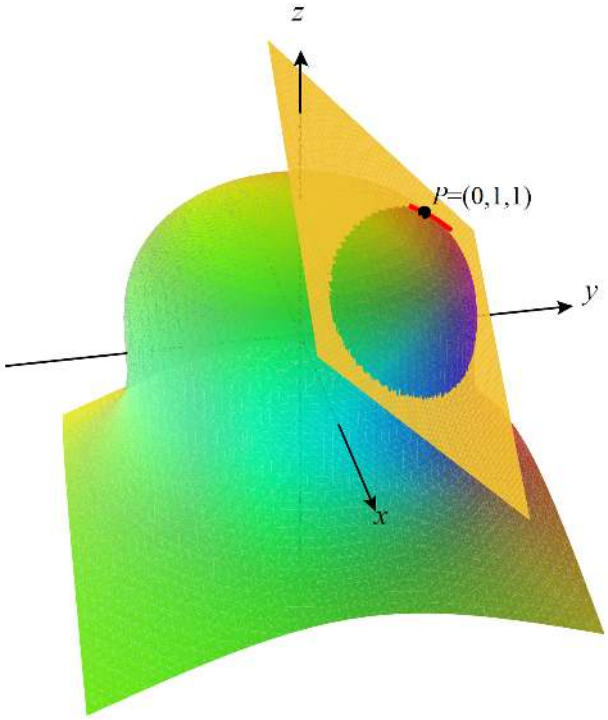
Derivamos con respecto a x en las igualdades $x^2+y^2+z^3=2$ y $x+y+z=2$, usando ya que y,z son funciones de $x\in I$ (pero suprimiendo el argumento (x) de las funciones $y(x),z(x),y'(x),z'(x),\dots$ por claridad). Entonces nos queda $2x+2yy'+3z^2z'=0$ y $1+y'+z'=0$ para $x\in I$. Tomando $x=0$ y usando que $y(0)=1,z(0)=1$, obtenemos $2y'(0)+3z'(0)=0$ e $y'(0)+z'(0)=-1$. Resolviendo este sistema obtenemos $y'(0)=-3$ y $z'(0)=2$.

Ahora, derivando con respecto a x las igualdades $2x+2yy'+3z^2z'=0$ y $1+y'+z'=0$ para $x\in I$, obtenemos $2+2(y')^2+2yy''+6z(z')^2+3z^2z''=0$ e $y''+z''=0$ para $x\in I$. Poniendo $x=0$ y usando que $y(0)=1,z(0)=1,y'(0)=-3,z'(0)=2$, nos queda $2y'(0)+3z'(0)=-44$ e $y''(0)+z''(0)=0$, con lo que $y''(0)=44$ y $z''(0)=-44$.

Volviendo a derivar obtenemos $6y'y''+2yy'''+6(z')^3+18zz'z''+3z^2z'''=0$ e $y'''+z'''=0$ para $x\in I$. Tomando $x=0$ y los valores anteriormente obtenidos queda $2y'''(0)+3z'''(0)=2328$ e $y'''(0)+z'''(0)=0$. Resolviendo este sistema nos queda $y'''(0)=-2328$ y $z'''(0)=2328$. Entonces, los polinomios de Maclaurin de grado 3 de $y(x)$ y $z(x)$ son, respectivamente,

$$y(x)\approx p_3(x)=1-3x+22x^2-388x^3, \qquad z(x)\approx q_3(x)=1+2x-22x^2+388x^3.$$

En la figura vemos la superficie $x^2+y^2+z^3=2$ (los tonos verdosos y violeta al fondo), el plano $x+y+z=2$ (en amarillo oscuro), el punto $P=(0,1,1)$ (en negro) y la aproximación de la curva C (en rojo) dada por la parametrización $x, y(x)\approx p_3(x), z(x)\approx q_3(x)$ con $-0.05<x<0.05$.



Corte de la superficie $x^2+y^2+z^3=2$ con el plano $x+y+z=2$.

Ejercicios

Utiliza la aplicación CalcPlot3D para dibujar las gráficas de las superficies que aparecen en los ejercicios.

Ejercicio 1. Calcula la recta tangente en $P=(0,0,2)$ a la curva C obtenida al cortar la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ con el paraboloide $x^2+z^2=y+4$.

Ejercicio 2. Sea C la curva dada por la intersección del paraboloide $z=2-(x^2+y^2)$ con el cilindro $x^2+z^2=2x$. Calcula las ecuaciones continuas de la recta tangente a C en el punto $P=(1,0,1)$.

Ejercicio 3. Sea C la elipse obtenida al cortar el elipsoide $x^2+4y^2+3z^2=16$ con el plano $x+y+2z=5$. Prueba que cerca del punto $P=(0,1,2)$ se pueden despejar las variables y y z de dicha elipse en función de la variable x y calcula los correspondientes polinomios de Maclaurin de grado 3.

Ejercicio 4. Prueba que el sistema de ecuaciones $x^2+zy^2+z^3=1$, $x+y+z=1$ define implícitamente las variables y, z como funciones $y(x), z(x)$ cerca de $P=(0,0,1)$ y calcula los correspondientes polinomios de Maclaurin de grado 2 de dichas funciones $y(x), z(x)$.

Ejercicio 5. Sea C la curva dada por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=3$ con el cilindro $x^2+y^2=2x$. Prueba que cerca de $P=(1,1,1)$ se pueden despejar las variables x e y de la curva como funciones de z y calcula los polinomios de Taylor de orden 3 de las correspondientes funciones alrededor del punto $z_0=1$.

Ejercicio 6. Sea C la curva dada por las ecuaciones implícitas $x+y+z^2=0$ y $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Prueba que cerca del punto $P=(1,-1,0)$ se pueden despejar las variables y, z de la curva como funciones de x y calcula los polinomios de Taylor de

orden 3 de las correspondientes funciones alrededor del punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 7. Sea S la superficie de ecuación implícita $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + z = 1$.

1. Prueba que dicha ecuación implícita permite definir z como una función de x e y, que denotaremos por $z = f(x, y)$,cerca de $P = (0, -1, 0)$.
2. Determina la dirección según la cual la derivada direccional de f en el punto $(0, -1)$ es máxima y calcula el valor de dicha derivada direccional.
3. Determina la ecuación del plano tangente a S en P.
4. Al cortar la superficie S con el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se obtiene una curva C que pasa por P. Halla la recta tangente a la curva C en el punto P y su curvatura en dicho punto P.

Ejercicio 8. Sea C la curva dada por las ecuaciones $y^2 + z^2 - x^2 + 2 = 0$ e $yz + xz - xy - 1 = 0$.

1. Prueba que es posible parametrizar un tramo de C cerca del punto $P = (2, 1, 1)$ tomando la variable x como parámetro.
2. Halla el vector $\vec{\mathbf{u}}$ que es tangente a la curva C en el punto P, es unitario y apunta en el sentido de subida de C en dicho punto.
3. Dado el campo escalar $f(x, y, z) = -xy - y^2 + xyz + z^2 + 2y - 2$, halla la derivada direccional de f en P en la dirección de $\vec{\mathbf{u}}$.

2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

Welcome to the Español Library. This Living Library is a principal hub of the LibreTexts project, which is a multi-institutional collaborative venture to develop the next generation of open-access texts to improve postsecondary education at all levels of higher learning. The LibreTexts approach is highly collaborative where an Open Access textbook environment is under constant revision by students, faculty, and outside experts to supplant conventional paper-based books.

6.1 Integrales de Línea

6.2 Campos Conservativos

6.1 Integrales de Línea

Muchos conceptos físicos, como el de trabajo desarrollado por una fuerza, se expresan en términos del comportamiento de un campo vectorial a lo largo de una curva, para lo que es necesario extender el concepto de integral. En los cursos de cálculo con una variable has estudiado la integral de una función continua en un intervalo. En esta lección estudiamos las integrales de línea, sustituyendo el intervalo por una curva en $\mathbb{R}^3$ (para trabajar en $\mathbb{R}^2$ basta con suprimir la tercera coordenada) y la función por un campo escalar o vectorial continuo sobre esa curva. En la mayoría de las aplicaciones de los conceptos y teoremas que veremos en esta lección las variables x, y y z representan coordenadas espaciales, por eso trabajaremos con gradientes en vez de diferenciales.

Sea C una curva regular a trozos parametrizada por $\vec{\mathbf{r}}(t)$, con $t \in [a,b]$, y sea $\vec{\mathbf{F}} : C \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. *La integral de línea de* $\vec{\mathbf{F}}$ *sobre* C se define como

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{r}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{r}}\,'(t)\, dt. \tag{1}$$

Cuando la curva es cerrada, se usa una notación especial que destaca este hecho: $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ en cuyo caso la integral también se denomina *circulación de* $\vec{\mathbf{F}}$ *a lo largo de* C.

Si la parametrización y el campo vectorial vienen dados por sus componentes, $\vec{\mathbf{r}}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ y $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \big(P(x,y,z),\, Q(x,y,z),\, R(x,y,z)\big)$, entonces la integral queda

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \big[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\big]\, dt \tag{2}$$

por lo que otra notación muy habitual para estas integrales de línea es

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz. \tag{3}$$

Para el caso bidimensional $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$se escribe

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C P\, dx + Q\, dy. \tag{4}$$

Propiedades de las integrales de línea de campos vectoriales. Sea C una curva regular a trozos parametrizada por $\vec{\mathbf{r}}(t)$, con $t \in [a,b]$, y sean $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{G}} : C \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales continuos.

LINEALIDAD : si λ y μ son números reales entonces $\displaystyle\int_C \left(\lambda\vec{\mathbf{F}} + \mu\vec{\mathbf{G}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \lambda \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \mu \int_C \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$

ADITIVIDAD : si C puede descomponerse en dos curvas C_1 y C_2 que no se solapan, entonces

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int_{C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}. \tag{5}$$

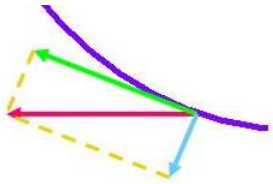
DEPENDENCIA DE LA ORIENTACIÓN : El valor absoluto de $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ no depende de la parametrización elegida, pero su signo sí. Si $\vec{\mathbf{r}}_1$ es una parametrización de C con la misma orientación que $\vec{\mathbf{r}}$ entonces $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_1$, mientras que si $\vec{\mathbf{r}}_2$ es una parametrización de C con orientación opuesta a $\vec{\mathbf{r}}$, entonces $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_2$.

Observación. Sea $\vec{\mathbf{r}}(t)$, con $t \in [a,b]$, una parametrización regular de la curva C. Entonces, usando que $\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\| \neq 0$, podemos escribir

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{r}}(t)\big) \cdot \vec{\mathbf{r}}\,'(t)\, dt = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\big(\vec{\mathbf{r}}(t)\big) \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}\,'(t)}{\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|} \|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|\, dt. \tag{6}$$

El vector $\vec{\mathbf{r}}\,'(t)/\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|$ que aparece en esta integral es el vector tangente unitario $\vec{\mathbf{T}}$, de manera que $\vec{\mathbf{F}} \cdot (\vec{\mathbf{r}}\,'/\|\vec{\mathbf{r}}\,'\|) = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}$ es la componente tangencial del campo $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de la curva y se tiene $\displaystyle\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}\, \|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|\, dt$. Por su analogía con la

integral $\int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|\,dt$ que nos da la longitud de C, la integral de línea también se suele escribir como $\int_C \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{T}}\,ds$, o bien $\int_C \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{T}}\,|d\vec{\mathbf{r}}|$, donde "ds" y "$|d\vec{\mathbf{r}}|$"se lee "diferencial de la longitud de arco".



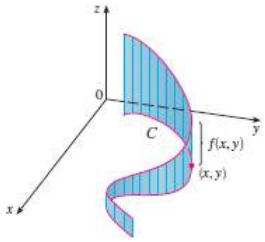
El campo F (en rojo) y su componente tangencial (en verde).

Integrales de línea de campos escalares con respecto a la longitud de arco. Sea C una curva regular a trozos parametrizada por $\vec{\mathbf{r}}(t)$ para $t\in[a,b]$ y sea $f\colon C\to\mathbb{R}$ un campo escalar continuo. La *integral de línea con respecto a la longitud de arco de f sobre C* se define como

$$\int_C f\,ds=\int_a^b f\big(\vec{\mathbf{r}}(t)\big)\,\|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|\,dt \tag{7}$$

donde "ds" se lee "diferencial de arco". Otra notación habitual es $\int_C f\,|d\vec{\mathbf{r}}|$. Además, cuando la curva es cerrada, se usa una notación especial que destaca este hecho: $\oint_C f\,ds$.

En el caso de una curva plana y un campo escalar de dos variables, podemos interpretar geométricamente la integral de línea de un campo positivo f sobre C de la siguiente manera: Cortamos la superficie $z=f(x,y)$ verticalmente a lo largo de la curva C ; es decir, sobre cada punto (x,y) de la curva levantamos una línea vertical de altura $z=f(x,y)$. El resultado es como una valla vertical cuya altura va cambiando. La integral de f sobre C es el área de dicha valla.



Interpretación geométrica de la integral de línea.

En particular, para el campo $f=1$ la integral de línea nos proporciona la longitud de la curva

$$\int_C 1\,ds=\int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}'(t)\|\,dt=\text{longitud de } C. \tag{8}$$

El teorema del cambio de variable para integrales nos permite probar que el valor de la integral no depende de la parametrización elegida (sea la curva recorrida en el mismo sentido o en sentido contrario). Si, en particular, C es una curva regular de longitud L y tomamos la parametrización natural $\vec{\mathbf{r}}_n\colon[0,L]\to C$ donde s es el parámetro longitud de arco , entonces sabemos que $\|\vec{\mathbf{r}}_n'(s)\|=1$, luego

$$\int_C f\,ds=\int_0^L f\big(\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{n}}(s)\big)\,ds \tag{9}$$

que es de donde viene la notación.

Propiedades de las integrales de línea con respecto a la longitud de arco. Sea C una curva regular a trozos parametrizada por r^3 y sean f, $g\colon C$ sendos campos escalares continuos en C.

(1) Linealidad: si λ y μ son números reales, entonces $\int_C(\lambda f+\mu g)\,ds=\lambda\int_C f\,ds+\mu\int_C g\,ds$.

(2) Monotonía: si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in C$, entonces $\int_C f\,ds \leq \int_C g\,ds$.

(3) Aditividad: si C puede escribirse como la unión de dos curvas C_1 y C_2, entonces $\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$. Esta propiedad facilita los cálculos en el caso en que distintas porciones de la curva se parametrizan mediante fórmulas distintas; un polígono, por ejemplo.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1

Ejercicio 1. Sea C el arco de la curva de ecuación $y = x^3$ recorrido desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(1,1)$. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (y^3, x^3 + 3xy^2)$ sobre C.

Ejercicio 2. Sea C el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$. Halla $\oint_C (2xy - x^2, x + y^2) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

Ejercicio 3. Sea C la curva cerrada formada por los arcos de las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$ recorrida en sentido positivo. Calcula $\oint_C (xy, x + y) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

Ejercicio 4. Calcula $\oint_C (-y, x^2 + 2) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, donde C es la circunferencia de centro el origen y radio a orientada en sentido positivo.

Ejercicio 5. Calcula $\oint_C \left(-y^3\,dx + x^3\,dy\right)$ sobre el triángulo C de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,2)$.

Ejercicio 6. Calcula $\oint_C 2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy$, donde C es la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos(\theta)$ orientada en sentido antihorario.

Ejercicio 7. Calcula $\int_C (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, donde C es el arco de la parábola $y = x^2$ comprendido entre $(-1,1)$ y $(1,1)$.

Ejercicio 8. Dados los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$ y $P = (1,1,1)$, calcula la integral de línea $\int_C y\,dx - (x - y)\,dy + x\,dz$ a lo largo de cada una de las tres curvas que tienen O como punto inicial y P como punto final dadas a con-ti-nua-ción: (1) La diagonal OP, (2) las aristas del cubo $OABP$ y (3) la quebrada OBP.

Ejercicio 9. Calcula la integral de línea del campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ sobre el segmento parametrizado por $\vec{\mathbf{r}}(t) = (1 + t, -1 + t, 1 + 2t)$ para $t \in [0,1]$.

Ejercicio 10. Sea C la hélice $\vec{\mathbf{r}}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), t/3)$, con $t \in [0, 4\pi]$. Halla $\int_C (x, zy, y) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

Ejercicio 11. Calcula $\int_C z\,dz$, siendo C la hélice cónica $\vec{\mathbf{r}}(t) = (t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t), t)$, para $t \in [0, 6\pi]$.

Ejercicio 12. Calcula $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la curva intersección de las superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$ con orientación positiva si se mira la curva desde arriba.

Ejercicio 13. Calcula $\oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, siendo C el triángulo de vértices $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ recorrido en este sentido.

Ejercicio 14. Calcula la integral $\int_C x^2 y\,ds$ sobre las siguientes curvas.

(1) La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geqslant 0$.
(2) La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con $x \leqslant 0$.
(3) La quebrada que une consecutivamente los puntos $(1,1)$, $(1,0)$y $(0,1)$.
(4) El segmento que une los puntos $(1,2)$ y $(3,-1)$.

Ejercicio 15. Prueba la siguiente propiedad de la cicloide: Si un punto se desliza por la cicloide (invertida), sin velocidad inicial, desde un punto A hasta el punto más bajo B sujeto únicamente a la acción de la gravedad, entonces el tiempo que tarda en llegar

hasta B es el mismo sea cual sea el punto A de partida (esta propiedad se conoce como *tautocronía*). Para ello, utiliza que la velocidad es $ds/dt = \sqrt{2gy}$, siendo y la distancia bajada medida en vertical, de manera que el tiempo que se tarda en recorrer un arco C de cicloide es $t = \displaystyle\int_C \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$.

Ejercicio 16. Calcula las siguientes integrales con respecto a la longitud de arco.

(1) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,ds$, siendo C la espiral $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\cos(t)+t\,\text{sen}(t), \text{sen}(t)-t\cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.
(2) $\displaystyle\int_C y^2\,ds$, siendo C la cicloide generada por una circunferencia de radio unidad.
(3) $\displaystyle\int_C x^2y^2\,ds$, siendo C la circunferencia unidad.
(4) $\displaystyle\int_C (x+y)\,ds$, donde C es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$y $(0,1)$.
(5) $\displaystyle\int_C 2xy\,ds$, siendo C la curva cerrada formada por los arcos de las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$ con $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$.

Ejercicio 17. Dada la función $f(x,y) = x^2y^2$, calcula las integrales de f con respecto a la longitud de arco sobre las curvas dadas por las siguientes parametrizaciones.

(1) $\vec{\mathbf{r}}_1(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$.
(2) $\vec{\mathbf{r}}_2(t) = (\cos(2t), \text{sen}(2t))$, con $t \in [0, 2\pi]$.
(3) $\vec{\mathbf{r}}_3(t) = (\cos(t), -\text{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$.

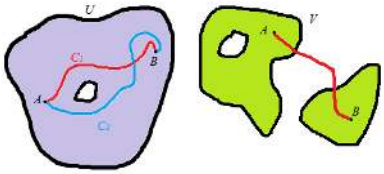
Observa que las tres son parametrizaciones distintas de la circunferencia unidad. ¿Cómo se recorre la circunferencia en cada caso?, ¿cómo influyen los diferentes recorridos en el valor de la integral?

6.1 Integrales de Línea is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

6.2 Campos Conservativos

Hay ocasiones en las que la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva no depende de la curva en sí, sino únicamente de los extremos inicial y final de la curva. Estos campos tienen una gran importancia en las aplicaciones y se llaman campos conservativos; la gravedad newtoniana o la fuerza eléctrica cuando no depende del tiempo son, como veremos, campos conservativos.

Conjunto conexo. Se dice que un conjunto U es {*conexo*} si todo par de puntos de U se puede unir mediante una curva regular a trozos contenida en U; en otras palabras, si dados dos puntos cualesquiera A y B podemos encontrar un camino para ir desde A hasta B sin salir de U.



U es conexo. V no es conexo.

Independencia del camino. Sean A y B dos puntos de un conjunto conexo U. Se dice que la integral de línea entre A y B de un campo vectorial continuo $\vec{[1]}$ en U es {*independiente del camino seguido para ir desde A hasta B*} si dadas dos curvas cualesquiera regulares a trozos C_1 y C_2 contenidas en U y tales que ambas empiezan en A y terminan en B, entonces se tiene que $\int_{C_1} \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]} = \int_{C_2} \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]}$. En este caso, dicha integral de línea se suele denotar por $\int_A^B \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]}$, notación que hace énfasis solo en los extremos inicial y final, no en el camino que se recorre.

Campo conservativo. Se dice que un campo vectorial continuo $\vec{[1]}$ es {*conservativo*} si para cada par de puntos $A, B \in U$ la integral de línea de $\vec{[1]}$ entre A y B es independiente del camino. Es f{'a}cil ver que un campo vectorial $\vec{[1]}$ es conservativo en U si, y solo si, la integral de $\vec{[1]}$ sobre cualquier curva cerrada, regular a trozos y contenida en U es cero.

Regla de Barrow para integrales de línea. Sea U un conjunto conexo y sea $f : U$ un campo escalar de clase $C^1(U)$. Sea C una curva regular a trozos, contenida en U, parametrizada por ${r} U $ con extremo inicial A y extremo final B. Entonces $ _C fd{r} = f(B)-f(A). $ %s ya que la integral de línea de un gradiente continuo en un %conjunto conexo solo depende de los puntos inicial y final de la curva %sobre la que se integra.

Funci´on potencial. Una consecuencia de este resultado es que si $\vec{[1]} = \nabla f$ es el gradiente de un campo escalar f de clase C^1 en un conjunto conexo U, entonces $\vec{[1]}$ es un campo conservativo. En este caso se dice que {\footnote“\dag”{En la Física se llama potencial a $-f$; ésta es una cuesti'on meramente terminológica y obedece a que poniendo el signo ``$-$'' las partículas sometidas a un campo conservativo se mueven en la direcci'on de menor potencial.}% de $\vec{[1]}$} y que $\vec{[1]}$ {} Es f{'a}cil ver que dos funciones potenciales cualesquiera de un mismo campo vectorial se diferencian en una constante, como ocurre con las primitivas de una funci'on de una variable.

$f(x, y) = \int_0^1 (P(tx, ty), Q(tx, ty)) \cdot (x, y)\, dt$ x==…=d/dt (tP(tx,ty))

Los campos vectoriales centrales son conservativos. Los campos vectoriales centrales de-ri-van de un potencial, luego son conserva-ti-vos en dominios conexos. Para ver que esto es cierto, sea el campo central $\vec{[1]}(x, y, z) = \psi(r)\vec{[1]}$, siendo $r= x+y+z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y ψ una funci'on continua en un intervalo del semieje positivo. Si $f(x, y, z) = \phi(r)$ es un campo escalar central, entonces $\nabla f = \big(\phi'(r)/r\big)\big(x\vec{[1]} + y\vec{[1]} + z\backslash\text{vectork}\big)$, seg'un hemos visto. Por tanto, tomando $\phi(r) = \int r\psi(r)\, dr$, tendremos que $\nabla f = \vec{[1]}$, o sea, f es un potencial de $\vec{[1]}$.

La regla de Barrow nos dice que si un campo vectorial $\vec{[1]}$ deriva de un potencial en un dominio conexo U entonces $\vec{[1]}$ es conservativo en U. Los resultados que siguen permiten dilucidar la cuestión recíproca de si todo campo conservativo deriva de un potencial y, en particular, nos dan una condición manejable para determinar si un campo vectorial dado es conservativo.

Sea U un conjunto conexo y sea $\vec{[1]}$ un campo vectorial conservativo en U. Fijamos un punto $P_0 \in U$ y definimos el campo escalar $f(P) = \int_{C_P} \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]}$ donde C_P es cualquier curva regular a trozos y contenida en U que vaya desde P_0 hasta P. Entonces f es una función potencial de $\vec{[1]}$.

Condiciones equivalentes a la de ser un campo conservativo. Sea $\vec{[1]}$ un campo vectorial continuo en un dominio conexo U, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\vec{[1]}$ deriva de una función potencial $f : U \to \mathbb{R}$.
2. $\vec{[1]}$ es conservativo en U.
3. Si C es cualquier curva regular a trozos y cerrada contenida en U, entonces $\oint_C \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]} = 0$.

Observaciones. Si $\oint_C \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]} \neq 0$ para una determinada curva cerrada C en U, en virtud del resultado anterior podemos deducir que $\vec{[1]}$ {} es un gradiente.

Las condiciones anteriores no son demasiado manejables para determinar si un campo deriva de un potencial. El objetivo del resto de la sección ser{'a} el estudiar una condición necesaria sobre las derivadas parciales de las funciones componentes que es muy {'u}til en la pr{'a}ctica.

%(A.~Clairaut, 1740). Sean U un conjunto conexo y $\vec{[1]} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase $C^1(U)$. Si $\vec{[1]}$ deriva de un potencial, entonces $\mathrm{rot}(\vec{[1]}) = \vec{[1]}$; es decir, las derivadas parciales de sus funciones componentes verifican
$P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ y $Q_z = R_y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{1}$$

En el caso bidimensional $\vec{[1]} = (P, Q)$, esto se reduce a $P_y = Q_x$. %$= $.

La condición de ser irrotacional es necesaria, pero no es suficiente para asegurar que un campo es conservativo. Es decir, un campo puede ser irrotacional y no ser conservativo; el ejemplo m'as típico es el campo definido por

$$\vec{[1]}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \qquad \text{para } (x, y) \neq (0, 0). \tag{2}$$

Este campo cumple $P_y = Q_x$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, luego $\mathrm{rot}(\vec{[1]}) = 0$, pero no es conserva-ti-vo en su dominio de definici'on porque $\oint_C \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]} = 2\pi$ siendo C la circunferencia unidad.

El hecho de que un campo sea conservativo no depende exclusivamente de sus compo-nen-tes, sino que tambi'en depende del dominio donde estemos trabajando. En este ejemplo, el problema es que C rodea el origen, punto en el que $\vec{[1]}$ no est'a definido. Sin embargo, si nos restringimos a un dominio que no rodee al origen, entonces no hay problema. Por ejemplo, el campo anterior sí es conservativo en el semiplano $x > 0$ donde admite la función potencial $f(x, y) = \arctan(y/x)$.

Se dice que un conjunto U {} cuando el segmento recto que une dos puntos cualesquiera de U siempre est{'a} contenido en U. Los conjuntos convexos son una clase especial de conjuntos conexos.

U es convexo, V no es convexo.

Vamos a ver que si el conjunto de referencia es convexo, entonces la condición de ser irrotacional es también suficiente para que un campo sea conservativo. Veremos en la Lecsci'on~8 que esto vale también en otro tipo de conjuntos conexos m'as generales que los convexos.

Sean U un conjunto convexo y $\vec{1}$ un campo vectorial de clase $C^1(U)$ tal que $\mathrm{rot}(\vec{1}) = \vec{1}$. %cuyo rotacional es cero. %%%%%%%%%%%%%

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{3}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%% Entonces $\vec{1}$ deriva de un potencial en U. O sea, en un conjunto convexo ser conservativo y ser irrotacional son equivalentes.

Si aplicando este teorema deducimos que un cierto campo $\vec{1} = (P, Q, R)$ deriva de un potencial f y queremos hallar uno, entonces podemos construir la función potencial que nos da el teorema fundamental del c{'a}lculo para integrales de línea (integrando a lo largo de un segmento, por ejemplo) o bien resolver el sistema $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ y $Q_z = R_y$. %de tres ecuaciones dife-ren-ciales %

$$\tag{4}$$

El campo vectorial $ {F}(x,y,z)=(y^2+z, , 2xy+z+1, , x+y+1) $ es conservativo en $\mathbb{R}^3$, que es convexo, porque es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e irrotacional:

$$\rot({\vector F})= {\left\vert\matrix\format\c&&\quad\c\\ \vector i & \vector j & \vector k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2+z & 2xy+z+1 & x+y+1\endmatrix\right\vert} = (0,0,0).$$

Para hallar un potencial f %, o sea, una funci'on f tal que $\nabla f = \vec{1}$ en $\mathbb{R}^3$, usamos el teorema fundamental del c'alculo para integrales de línea, que dice que podemos obtener f mediante $ f(x,y,z)=_C F dr $ siendo C el segmento rectilíneo que une $(0,0,0)$ con (x,y,z).

Parametrizamos C mediante $\vec{1}(t) = (tx, ty, tz)$, con $t \in [0,1]$, y tenemos

$$\align f(x,y,z)&=\int_C \vector F \cdot d\vector r = %= \int_0^1 \vector F\bigl(\vector r(t)\bigr) \cdot {\vector r}\,{}'(t) \, dt \\ & = \int_0^1 \bigl((ty)^2+tz, \, 2(tx)(ty)+tz+1, \, tx+ty+1\bigr) \cdot (x,y,z) \,dt \\ & =\int_0^1 \bi$$

%donde, para dar el pen'ultimo paso, basta con integrar el primer sumando por partes. Otra manera de obtener un potencial f es resolver las correspondientes ecuaciones

$$f_x = y^2 + z, \qquad f_y = 2xy + z + 1, \qquad f_z = x + y + 1. \tag{5}$$

Integrando parcialmente la primera con respecto a x nos queda $ f(x,y,z)=xy^2+zx+ c(y,z) $, donde $c(y,z)$ es la constante de la integraci'on parcial con respecto a x, constante que podrá depender de las variables y, z. Ahora, derivando parcialmente con respecto a y en esta expresi'on de f y usando la segunda de las ecuaciones anteriores, obtenemos $ 2xy+ c_y= f_y = 2xy+z+1, $ de donde obtenemos que $c_y = z+1$. Integrando parcialmente con respecto a y, queda $c(y,z) = yz + y + d(z)$, donde $d(z)$ es la constante de la integraci'on parcial con respecto a y, que podrá depender de z. Tenemos entonces que f es de la forma $f(x,y,z) = xy^2 + zx + yz + y + d(z)$. Finalmente, derivando con respecto a z y usando la tercera ecuaci'on, obtenemos $ x+y+d'(z)=f_z = x+y+1, $ con lo que $d'(z) = 1$ y, por tanto, $d(z) = z + k$, siendo k una constante. En definitiva, una funci'on potencial de $\vec{1}$ es $f(x,y,z) = xy^2 + zx + yz + y + z + k$, donde k es una constante arbitraria.

En cada uno de los siguientes casos, determina si $\vec{1}$ es o no es el gradiente de un campo escalar en su dominio de definici'on. En caso afirmativo, calcula una función potencial.

$$\matrix\format\r&\,\,\l&\quad\r&\,\,\l&\quad\r&\,\,\l\\ (1) & {\vector F}(x,y)=(x,y) & (2) & {\vector F}(x,y)=(3x^2y+3, x^3+2y+2) & (3) & {\vector F}(x,y)=(3x^{2}y,x^{3}) \\ (4) & {\vector F}(x,y)= (2xy,x^{2}+1)& (5) &$$

Sabiendo que el campo ${F}(x,y)=((y)-ay(x)+x,(x)+x(y)+y) $ es conservativo en $\mathbb{R}^2$, halla el valor de a y calcula una función potencial f tal que $f(1,-1) = 1$.

Halla los valores de a para los que se cumple que $\vec{1}(x,y) = (ax^2y + 3,\ x^3 + 4y + 2)$ es un campo vectorial conservativo en $\mathbb{R}^2$ y halla un potencial f tal que $f(1,-1) = 3$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Sea $\vec{1}$ el campo vectorial bidimensional dado por

$$(x,y)=\left(\sen(xy)+xy\cos (xy)+by, x^{2}\cos(xy)+\int_{0}^{x}e^{at^{2}}\,dt\right) .$$

Determina los valores de a y b sabiendo que $\vec{1}$ es un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$ y calcula una función potencial de $\vec{1}$.

Halla la integral de línea $ _{C}

d{r} $ donde C es el segmento rectilíneo que va desde el punto $A = (\pi/2, 0)$ hasta el punto $B = (\pi/2, 1)$. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Sea $\vec{1}$ el campo $ {F}(x,y)=(-{y}/{x^{2}}, {1}/{x}) $ para $x \neq 0$.

Describe los dominios donde $\vec{1}$ es conservativo y halla sus funciones potenciales.

Calcula $\int_C \vec{1} \cdot d\vec{1}$ siendo C la par{'a}bola que va desde $(2,1)$ hasta $(2,-1)$ pasando por $(9,0)$.

%%%%%%%%%%%%%% Usa la regla de Barrow para integrales de línea para hallar la integral de línea del gradiente del campo escalar $f(x,y) = xy^2$ a lo largo del arco de la par{'a}bola que comienza en el punto $(1,1)$, pasa por el punto $(2,3)$ y termina en el punto $(4,8)$. %%%%%%%%%%%%%%%

Calcula un potencial de cada uno de los siguientes campos centrales. $\vec{1}(x,y,z) = r^n\left(x\vec{1} + y\vec{1} + z\vec{\mathrm{vector}}\right)$ para $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ $\vec{1}(x,y,z) = \log(r)\left(x\vec{1} + y\vec{1} + z\vec{\mathrm{vector}}\right)$.

$\vec{1}(x,y,z) = e^{-r}\left(x\vec{1} + y\vec{1} + z\vec{\mathrm{vector}}\right)$.

En cada uno de los siguientes casos, determina si el campo tridimensional $\vec{1}$ es o no es el gradiente de un campo escalar en su dominio de definici'on o en alguna parte conexa del mismo. En caso afirmativo, calcula una función potencial.

$$\matrix\format\r&\,\,\l&\qquad\r&\,\,\l\\ (1) & {\vector F}(x,y,z)=(x,y,z) & (2) & {\vector F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2) \\ (3) & {\vector F}(x,y,z)=(2xyz, x^2z,x^2y) & (4) & \vector F(x,y,z)=\bigl(y \sen(z), \, x\sen(z), \, xy\cos(z$$

El campo $ F(x,y,z)=(y z (x z)+az, , (x z), , y x (x z)+4x) $ es conserva-tivo en $\mathbb{R}^3$. Halla a y calcula $\oint_{C_1} \vec{1} \cdot d\vec{1}$ y $\int_{C_2} \vec{1} \cdot d\vec{1}$ siendo C_1 y C_2 las curvas regulares que se muestran en la figura.

Dados el campo vectorial $\vec{1}(x,y,z) = \left(2xyz^3 + ye^{xy},\ x^2z^3 + xe^{xy},\ 3yx^2z^2 + \cos(z)\right)$ y la superficie esf{'e}rica S de centro el origen y radio $\pi/2$, se pide:

Estudiar si $\vec{1}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$ y, en caso afirmativo, encontrar una funci'on potencial.

Hallar $\int_{C_1} \vec{1} \cdot d\vec{1}$ siendo C_1 un meridiano de S recorrido desde el polo norte hasta el sur.

Calcular $\oint_{C_2} \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]}$ siendo C_2 el paralelo que se obtiene al cortar S con el plano $z = 1$.

Sea $\vec{[1]}$ el campo vectorial definido para todos los puntos (x, y, z) con $z \neq 0$ por

Prueba que $\vec{[1]}$ es irrotacional en todo su dominio de definici'on.

Prueba que $\vec{[1]}$ es conservativo en el conjunto W formado por los puntos (x, y, z) con $z > 0$. ?`Es $\vec{[1]}$ conservativo en todo su dominio de definici'on? Justifica la respuesta.

Calcula una funci'on potencial de $\vec{[1]}$ en W.

Calcula la circulaci'on $\oint_C \vec{[1]} \cdot d\vec{[1]}$ de $\vec{[1]}$ alrededor de la elipse C que se obtiene al cortar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $y + z = 2$, recorrida en sentido positivo cuando se mira desde arriba.

Calcula la integral de línea de $\vec{[1]}$ sobre la espiral dada por $\vec{[1]}(t) = \left(e^t \cos(t),\ e^t \operatorname{sen}(t),\ e^t\right)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Halla los valores de a y b para los que $\vec{[1]}(x, y, z) = \left(ay \operatorname{sen}(z),\ bx \operatorname{sen}(z),\ abxy \cos(z)\right)$ es un campo conservativo en $\mathbb{R}^3$ y, para dichos casos, calcula una funci'on potencial de $\vec{[1]}$.

%%%%%%%%%%%%% GREEN A LA LECCIÓN 8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%En {Matem'aticas II} se vieron algunas ecuaciones diferenciales %que pueden resolverse explícita-men-te. %: las ecuaciones en %variables separadas y las lineales. Vamos a estudiar ahora una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden resolverse explícitamente, al igual que las separables y las lineales vistas en {Matem'aticas II}.

Sea $f(x, y)$ un campo escalar de clase C^1 en su dominio con gradiente $\nabla f(x, y) = \big[P(x, y),\ Q(x, y)\big]$. Supongamos que en una curva de nivel $f(x, y) = c$, la variable y es una función derivable $y = y(x)$ de x. Entonces, al derivar $f(x, y(x)) = c$, obtenemos que y es una solución de la ecuación diferencial $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$.

%(A.~Clairaut, 1740). Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ dos campos escalares continuos en un conjunto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Diremos que $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ es {} si el campo $\vec{[1]}(x, y) = \big(P(x, y),\ Q(x, y)\big)$deriva de un potencial $f(x, y)$de clase $C^1(U)$. En ese caso, la solución general de dicha ecuación es $f(x, y) = c$. En particular, para que la ecuación sea exacta basta con que U sea un conjunto convexo en el que se verifique $P_y = Q_x$. %$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

La ecuación $y^2 e^{xy} + (1 + xy)y' e^{xy} = 0$ es exacta porque $ [y^{2e}{xy}]_y= [(1+xy)e^{xy}]_x %=(2y+y^{2x)e}{xy}, $, con lo que $\vec{[1]} = (y^2 e^{xy},\ (1 + xy)e^{xy})$ deriva de una función potencial f en todo el plano. Para hallar f, integramos $f_x = y^2 e^{xy}$ con respecto a x y obtenemos $ f(x,y)=ye^{xy}+h(y) $ donde h es una función que solo depende de y (la ``constante'' de la integraci'on con respecto a x). Derivando esta expresi'on de f con respecto a y y usando que $f_y = (1 + xy)e^{xy}$, queda $h'(y) = 0$ y, por tanto, h es constante. En resumen, una función potencial es $f(x, y) = ye^{xy}$ y la solución general de la ecuación diferencial es $ye^{xy} = c$, siendo c una constante cualquiera.

Observemos lo siguiente: Como $e^{xy} \neq 0$, resulta que $y^2 e^{xy} + (1 + xy)y' e^{xy} = 0$ tiene las mismas soluciones que $y^2 + (1 + xy)y' = 0$. Sin embargo, esta {'u}ltima no es exacta; al simplificar e^{xy} pierde esa cualidad. Por eso, el término e^{xy} se llama factor integrante de la ecuación $y^2 + (1 + xy)y' = 0$.

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ dos campos escalares continuos en un dominio conexo. Diremos que $\mu(x, y)$ es {} de la ecuación $ P(x,y)+Q(x,y)y'=0 $ cuando, al multiplicar por $\mu(x, y)$, la ecuación resultante $ (x,y)P(x,y)+(x,y)Q(x,y)y'=0 $ es una ecuación diferencial exacta. En consecuencia, si se puede encontrar un factor integrante, lo que no siempre es posible o f'acil, entonces se puede resolver la ecuaci'on hallando un potencial del campo $(\mu P, \mu Q)$.

%%%%%%%%%%%%% Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante de $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, entonces se cumple $\mu_y P - \mu_x Q = \big(Q_x - P_y\big)\mu$.

P- Q= (-). \]

Por tanto, para buscar un factor integrante debemos resolver esta ecuaci'on, lo que no siempre es posible, ni f'acil, salvo en algunos casos especiales. %%%%%%%%%%%%%

Resuelve el problema de valor inicial $(2x + 2y) + (6y + 2x - 1)y' = 0$ con $y(2) = -1$, probando previamente que la ecuaci'on diferencial es exacta.

Sabiendo que $y(6x - 1) + (3x^2 + 3y^2 - ax)y' = 0$ es exacta, calcula a y resuelve el problema de valor inicial $y(0) = 8$ para dicho valor de a.

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

\matrix\format\r&\quad\l&\qquad\r&\quad\l\\ (1) & 2xy+(x^2-1)y'=0 & (2) & 2xy+(x^2-y^2)y'=0 \\ (3) & y^2-2x+2xyy'=0 & (4) & (x-y^2)-(2xy+y)y'=0\\ (5) & 2x^{3}+3y +\left(3x+y-1\right) y'=0 & (6) & x-2y+\left(6y-2

Resuelve el problema de valor inicial $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ con $y(1) = 3$ sabiendo que la ecuaci'on diferencial admite un factor integrante que solo depende de x.

Resuelve estas ecuaciones hallando un factor inte-gran-te que solo depende de x.

\matrix\format\r&\quad\l&\qquad\r&\quad\l\\ (1) & y+(x^2-x)y'=0 & (2) & (2y^2+9xy)+(2xy+3x^2)y'=0 \\ (3) & 3xy-2y^3+(x^2-3xy^2)y'=0 & (4) & 3xy+2y^2+(x^2+2xy)y'=0 \endmatrix

Resuelve estas ecuaciones hallando un factor inte-gran-te que solo depende de y.

\matrix\format\r&\quad\l&\qquad\r&\quad\l\\ (1) & y+(2x+3y)y'=0 & (2) & (2xy+y^4)+(3x^2+6xy^3)y'=0 \\ (3) & y^2 \cos(x) + \bigl(4+5y \sen(x)\bigr) y'=0 & (4) & 2xy^2+(3yx^2+2)y'=0 \endmatrix

Considera la ecuaci'on diferencial $(3x^2 + 3y\cos(x)) + (x^3 + 3(1 + y)\operatorname{sen}(x))y' = 0$.

Prueba que no es una ecuaci'on diferencial exacta en el plano.

Halla un factor integrante de dicha ecuaci'on que solo dependa de y.

Calcula la soluci'on general de la ecuaci'on.

Resuelve el correspondiente problema de valor inicial con $y(\pi) = 0$.

Resuelve
$2y - 6x + (3x - 4x^2/y)y' = 0$, hallando un factor integrante $\mu(x, y) = xy^a$.

Resuelve
$y^3 + xy^2 + y + (x^3 + x^2 y + x)y' = 0$ hallando un factor integrante que solo depende del producto xy.

Resuelve estas ecuaciones hallando un factor integrante $\mu(x, y) = x^m y^n$

$$(1)\quad \left(4xy + 3y^4\right) + \left(2x^2 + 5xy^3\right)y' = 0 \qquad (2)\quad \left(2y^2 + 4x^2 y\right) + \left(4xy + 3x^3\right)y' = 0. \tag{6}$$

{

Aunque existen aportaciones anteriores, el primer matem'atico que parece haber estudiado de manera sistem'atica las integrales de línea del tipo $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ fue Alexis Clairaut. En una serie de trabajos publicados a partir de 1740 dio la primera formulaci'on de las condiciones para que un campo (P, Q) derivase de un potencial (en la nomenclatura de la 'epoca, que la {} $ P dx +Q dy $ fuera {}). Sin embargo, su prueba de que los campos irrotacionales son conservativos no era correcta, lo que fue puesto de mani-fies-to por Jean D'Alembert en 1768 con el mismo ejemplo que hemos visto aquí. Asimismo, Clairaut fue, a partir de trabajos previos de Leonhard Euler, el primero en estudiar las ecuaciones diferenciales exactas y la existencia de factores integrantes. Tras los trabajos de Clairaut, el desarrollo de las integrales de línea tal como lo hemos visto fue establecido por Joseph Louis Lagrange, Pierre S.~Laplace, Carl F.~Gauss, Augustin L.~Cauchy y Bernhard Riemann, a finales del siglo {xviii} y comienzos del {xix}.

%%%%%%%%%%%%% El teorema de Green se suele atribuir a G.~Green ya que puede deducirse de otro resultado de su estudio de la teorá del potencial (1828), aunque, de hecho, habá aparecido ya en trabajos de C.F.~Gauss y J.L.~Lagrange. La primera formulaci'on tal y como se usa hoy en dá se debe a A.L.~Cauchy (1846) y la primera demostraci'on rigurosa se debe a B.~Riemann (1851).

Fue Bernard Bolzano el primero en conjeturar de manera precisa que toda curva de Jordan regular a trozos descompone el plano en dos conjuntos conexos y disjuntos que tienen a la curva C como frontera com'un y en afirmar que no es un resultado evidente, sino que requiere una demostraci'on. La primera demostraci'on se debe al propio Camille Jordan en 1887, pero dicha demostraci'on ha estado sujeta a controversias sobre su completitud, aunque la idea central se considera correcta. Hoy en dá se acepta que la primera prueba completa fue dada por Oswald Veblen en 1905. %%%%%%%%%%%%%%%%%%

G.L.~Bradley y K.J.~Smith C{'a}lculo, vol.~2 Capítulo 14

R.E.~Larson, R.P.~Hostetler y B.H.~Edwards C{'a}lculo, vol.~2 Capítulo 14

G.B.~Thomas, Jr. C'alculo, varias variables Secciones 16.1 a 16.3

}

%%%%%%%%%%%%%%%%%GREEN

El teorema de Green establece la igualdad, bajo ciertas condiciones, entre una integral doble y una integral de línea en el plano, concretamente

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{7}$$

donde D es una regi'on acotada del plano y C es la curva cerrada que forma su frontera.

En cierto modo es un an'alogo bidimensional a la regla de Barrow que, al fin y al cabo, nos dice que podemos calcular la integral de una funci'on en un intervalo $[a,b]$ evaluando una primitiva en la frontera del intervalo: los extremos a y b.

Para la validez de la igualdad se necesitan dos tipos de hip'otesis. En primer lugar, hip'otesis sobre P y Q que garanticen la existencia de las integrales
que aparecen. Habitualmente se considera que P y Q son de clase C^1. En segundo lugar hay que imponer condi-cio-nes de tipo geom'etrico sobre el recinto D y su curva frontera C, concretamente supondremos que C es una curva de Jordan (o sea, cerrada y simple) regular a trozos. Puede demostrarse (y no es nada elemental aunque sea intuitivamente muy claro) que toda curva de Jordan regular a trozos descompone el plano en dos conjuntos conexos y disjuntos que tienen a la curva C como frontera com'un. Uno de dichos conjuntos no es acotado y se llama {} El otro sí es acotado y se llama {} esta región interior junto con su frontera C ser{'a} la región acotada cuya frontera es C y que representaremos por D.

Finalmente, hay otro detalle que debemos tener en cuenta en el enunciado del teorema de Green, la orientaci'on de la curva C debe ser la {} es decir, C debe ser recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, como viste en la asignatura de {Matem'aticas~II}. Esto quiere decir que la parametrizaci'on considerada debe recorrer la curva dejando a la izquierda la región interior. %Nos conformaremos con esta formulaci'on intuitiva.

Sea $C $ una curva de Jordan regular a trozos parametrizada por una función que la recorre en sentido positivo. Sean $ P $ y $ Q$ dos campos escalares de clase C^1 en la región acotada D cuya frontera es C. Entonces se tiene

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{8}$$

En otros t'erminos, si $\overrightarrow{[1]} = (P,Q)$ es de clase C^1 en D, entonces

$$\oint_C \overrightarrow{[1]} \cdot \overrightarrow{[1]} = \iint_D \operatorname{rot}(\overrightarrow{[1]})\,dA. \tag{9}$$

Si aplicamos el teorema de Green al campo dado por $\overrightarrow{[1]}(x,y) = (-y,x)$, obtenemos una f'ormula para hallar el 'area de la regi'on D.

Sea $C $ una curva de Jordan regular a trozos y sea D la región acotada cuya frontera es C. Entonces se tiene que

$$\{\'a\}\text{rea}(D) = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx). \tag{10}$$

Esta forma de calcular el 'area de una regi'on a partir de los valores que toma el campo $(-y,x)$ en su frontera es la base te'orica de los {} que son aparatos que permiten calcular el 'area de una regi'on irregular dibujada en un mapa deslizando un puntero por su frontera (mira, por ejemplo, {http://www.youtube.com/watch?v=QA8mOW7fvio}.)

Vamos a usar ahora el teorema de Green para ver que, como anunciamos al final de la secci'on anterior, en el plano hay una clase m'as amplia que la de los conjuntos convexos en los que la irrotacionalidad de un campo garantiza que es conservativo en dicho conjunto.

Se dice que un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ es {} si para toda curva de Jordan $ C$ contenida en U, la región acotada D cuya frontera es C verifica $D \subset U$. Gr'aficamente, un conjunto simplemente conexo es un conjunto que no tiene agujeros. Se dice que un conjunto es {} si es conexo pero no es simplemente conexo.

Sea ${F}=(P,Q) $ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Se verifica que $\overrightarrow{[1]}$ es conservativo en U si, y solo si, se cumple $ = $ en U.

Como hemos visto, una región m{'u}ltiplemente conexa es una región con agujeros. Si queremos extender el teorema de Green para este tipo de regiones, a la integral de línea sobre la frontera exterior que aparece debemos a{~n}adir integrales a lo largo de curvas que aíslen los agujeros. Por simplicidad, enunciaremos el teorema para el caso de un recinto con dos agujeros (como la regi'on V de la figura anterior).

Sea $U^2 $ un conjunto conexo con dos agujeros cuya frontera exterior es una curva de Jordan regular a trozos C. Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan, regulares a trozos, interiores a C y exteriores entre sí que rodean los agujeros interiores de U. Sean $ P $ y $ Q$ dos campos escalares de clase C^1 en U. Sea D la región contenida en U que es interior a C y exterior a C_1 y a C_2. Entonces se verifica

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C (P\,dx + Q\,dy) - \oint_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) - \oint_{C_2} (P\,dx + Q\,dy). \tag{11}$$

donde las tres curvas C, C_1 y $C_2 $ son recorridas en sentido positivo.

Sean P y Q dos campos escalares de clase C^1 en un conjunto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tales que
$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ en U. Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan regulares a trozos, contenidas en U, que no se cortan y tales que C_1 rodea completamente a C_2. Supongamos que la región anular D comprendida entre C_1 y C_2 se queda contenida en U. Entonces se tiene

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy \tag{12}$$

si ambas se recorren en el mismo sentido.

El teorema de Green admite varias interpretaciones y tiene varias consecuencias que afectan a diferentes maneras de considerar las derivadas de los campos vectoriales. Este conjunto de interpre-ta-ciones y fórmulas se conoce como {} y son de mucha utilidad en las aplicaciones al estudio de los campos electromagn'eticos.

Sea ${F}= (P,Q) U ^2 $ un campo vectorial de clase $C^1(U)$ y sea C una curva de Jordan regular cuya región interior D se queda contenida en U (de manera que podamos aplicar el teorema de Green). Sea $\overrightarrow{[1]}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, para $t \in [a,b]$, una parametrización de C que la recorre en sentido positivo. Para cada punto $P = \big(x(t), y(t)\big)$ de la curva consideremos su vector tangente unitario $\overrightarrow{[1]}(P)$ y su vector normal exterior unitario $\overrightarrow{[1]}(P)$ dados, respectivamente, por

$$\vec{[1]}(P) = \frac{\big(x'(t), y'(t)\big)}{\|\big(x'(t), y'(t)\big)\|} \qquad \text{y} \qquad \vec{[1]}(P) = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\|\big(x'(t), y'(t)\big)\|} \tag{13}$$

({} es porque apunta en direcci'on a la regi'on exterior a C). Entonces se verifican:

{} La forma de Stokes, o del rotacional, del teorema de Green:

$$\iint_D \operatorname{rot}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C P\, dx + Q\, dy = \oint_C \vec{[1]} \cdot \vec{[1]}\, ds. \tag{14}$$

El nombre de forma del rotacional se debe a que para un campo bidimensional $\vec{[1]} = (P, Q)$ su rotacional es $\operatorname{rot}(\vec{[1]}) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ con lo que la igualdad anterior se puede escribir

$$\iint_D \operatorname{rot}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \oint_C P\, dx + Q\, dy. \tag{15}$$

{} La forma de Gauss, o de la divergencia, del teorema de Green:

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = \oint_C (-Q)\, dx + P\, dy = \oint_C \vec{[1]} \cdot \vec{[1]}\, ds. \tag{16}$$

El nombre de forma de la divergencia se debe a que, como veremos en la Lecci'on 6, la divergencia del campo bidimensional $\vec{[1]} = (P, Q)$ es el campo escalar $\operatorname{div}(\vec{[1]}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

con lo que la igualdad anterior se puede escribir

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \oint_C (-Q)\, dx + P\, dy. \tag{17}$$

Si f es un campo escalar de clase C^1 en U se definen su {} \dtf y su {} \dnf en un punto de la curva como, respectivamente, las derivadas direccionales con respecto a los vectores unitarios tangente y normal exterior; es decir $ =f $ y $:=f . $

En las condiciones dadas, sean $f\colon U \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{[1]}\colon U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, ambos de clase C^1 en U. Entonces

$$\iint_D f\, \operatorname{div}(\vec{[1]})\, dA = \oint_C f\, \vec{[1]} \cdot \vec{[1]}\, ds - \iint_D \vec{[1]} \cdot \nabla f\, dA. \tag{18}$$

}

En las condiciones dadas, sean $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ dos campos escalares de clase C^2 en U. Entonces

\align \iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} \,dxdy & = -\oint_C f g \,dx - \iint_D g \frac{\partial f}{\partial y} \,dxdy,\\ \iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} \,dxdy & = \oint_C f g \,dy - \iint_D g \frac{\partial f}{\partial x} \,

}

Comprueba la igualdad que establece el teorema de Green para la circunferencia unidad y el campo $\vec{[1]}(x, y) = (x, 2x)$

Calcula la circulaci'on del campo vectorial $\vec{[1]}(x, y) = (x + 3y, x - y)$ alrededor del tri'angulo de v'ertices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, 4)$.

Sea C la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sea $\vec{[1]}(x, y) = (-y, x)$. Comprueba, para la curva C y el campo $\vec{[1]}$, la igualdad dada por el teorema de Green.

Sea C la frontera del cuarto de anillo contenido en el primer cuadrante y comprendido entre las circunferencias de centro el origen y radios 1 y 2, respectivamente. Comprueba, para la curva C y el campo $\vec{[1]}(x, y) = (x^2 + y^2 - y, 2xy)$, la igualdad que establece el teorema de Green.

Usando el teorema de Green, calcula la siguiente integral de línea en el arco de la lemniscata C dada por la ecuación polar $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/4]$.

$$\int_C \big(e^x \cos(y) + xy^2\big)\, dx - \big(e^x \operatorname{sen}(y) + x^2 y\big)\, dy. \tag{19}$$

Sea D la regi'on limitada inferiormente por la circunferencia unidad y superiormente por la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ y C su frontera. Consideremos el campo vectorial

$$\vec{[1]}(x, y) = \big(\cos(2xy) - 2xy \operatorname{sen}(2xy) + 2xye^{x^2y}, -2x^2 \operatorname{sen}(2xy) + x^2 e^{x^2y}\big). \tag{20}$$

?`Es $\vec{[1]}$ conservativo en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, calcula una funci'on potencial. Dado $\vec{[1]}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, y)$, calcula directamente la integral $\oint_C (\vec{[1]} + \vec{[1]}) \cdot d\vec{[1]}$.

Comprueba el resultado del apartado anterior usando el teorema de Green.

Comprueba que se da la igualdad dada por el teorema de Green en los siguientes casos. $\vec{[1]}(x, y) = (x, 1)$, en el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$. $\vec{[1]}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$, en el rect{'a}ngulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ y $(1, 0)$.

$\vec{[1]}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(-y, x)$, en el anillo $0 < a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$.

Sea D el semianillo que est'a contenido en el semiplano superior entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Sea C la frontera del semianillo D. Calcula $ _C y^2 ,dx , + , 3xy , dy$ donde C se recorre en sentido positivo.

Sea $\vec{[1]}$ el campo definido para $(x, y) \neq (0, 0)$ por $ {F}(x,y)=(,). $

Prueba que $\operatorname{rot}(\vec{[1]}) = 0$ en su dominio de definici'on U. ?`Se puede deducir de este resultado que $\vec{[1]}$ es conservativo en U? Explica por qu'e.

Calcula una funci'on potencial de $\vec{[1]}$ en U. ?`Se puede deducir de la existencia del potencial que $\vec{[1]}$ es conservativo en U? Explica por qu'e.

Calcula $ _C F dr$ siendo C el segmento rectilíneo que va desde $A = (3, 4)$ hasta $B = (0, 2)$.

Consideremos ahora el campo $\vec{[1]}$ definido para $(x, y) \neq (0, 0)$ por $\vec{[1]}(x, y) = \vec{[1]}(x, y) + (x, 2x)$ y sea C_R la circunferencia con centro el origen y radio $R > 0$.

Calcula $ _{C_R} G dr$ donde la circunferencia se recorre en sentido positivo.

Sea D el anillo comprendido entre dos circunferencias C_r y C_R, definidas como antes, con $0 < r < R$. Calcula $ _D (G) ,dxdy$ directamente y usando el teorema de Green.

1. Prueba que el campo $\vec{[1]}(x, y) = (3x^2y + 3, x^3 + 2y + 2)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y halla una funci'on potencial f tal que $f(1, -1) = 3$.

Calcula la integral de línea $ _{C_1} F dr, $ siendo C_1 el arco de la curva de ecuaci'on $y = x^3$ recorrido desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.

Considera ahora el campo $ G(x,y)=(,,) $ y calcula el rotacional de $\vec{[1]} + \vec{[1]}$. ?`Puedes decir, a partir del valor del rotacional, si $\vec{[1]} + \vec{[1]}$ un campo conservativo en su dominio de definici'on?

Sea C_2 la cardioide definida en coordenadas polares por $r = 1 + \cos(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calcula $ _{C_2} (F + G) dr$ cuando C_2 se recorre en sentido positivo.

Sea C una curva de Jordan, con regi'on interior D y sea f un campo escalar de clase $C^2(U)$ en un dominio U en el que est'an contenidos C y D. Prueba que

$$\oint_C \nabla f \cdot \vec{[1]}\, ds = \iint_D \nabla^2 f \, dx dy \tag{21}$$

donde $\vec{[1]}$ es el campo de vectores normales unitarios exteriores a C y $\nabla^2 f$ es el laplaciano de f.

Calculando ambas integrales, comprueba que se verifica la igualdad dada antes en el caso particular en que C es la circunferencia unidad y $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2$.

Dado el campo vectorial $F=(, ,).

1. Prueba que es irrotacional en su dominio de definici'on.
2. Calcula la circulaci'on de $\vec{[1]}$ sobre la circunferencia C_a con centro el origen y radio $a \neq 2$.
3. ?`Cu'ales son los dominios conexos m'as grandes en los que puedes garantizar que $\vec{[1]}$ es conservativo?

El teorema de Green establece la igualdad, bajo ciertas condiciones, entre una integral doble y una integral de línea en el plano, concretamente [_{C} P, dx ,+, Q ,dy = _D (-) ,dx,dy,] donde (D) es una regi'on acotada del plano y (C) es la curva cerrada que forma su frontera.

En cierto modo es un an'alogo bidimensional a la regla de Barrow que, al fin y al cabo, nos dice que podemos calcular la integral de una funci'on en un intervalo ([a,b]) evaluando una primitiva en la frontera del intervalo: los extremos (a) y (b).

Para la validez de la igualdad se necesitan dos tipos de hip'otesis. En primer lugar, hip'otesis sobre P y Q que garanticen la existencia de las integrales
que aparecen. Habitualmente se considera que P y Q son de clase C^1. En segundo lugar hay que imponer condi-cio-nes de tipo geom'etrico sobre el recinto D y su curva frontera C, concretamente supondremos que C es una curva de Jordan (o sea, cerrada y simple) regular a trozos. Puede demostrarse (y no es nada elemental aunque sea intuitivamente muy claro) que toda curva de Jordan regular a trozos descompone el plano en dos conjuntos conexos y disjuntos que tienen a la curva C como frontera com'un. Uno de dichos conjuntos no es acotado y se llama {} El otro sí es acotado y se llama {} esta región interior junto con su frontera C ser{'a} la región acotada cuya frontera es C y que representaremos por D.

Finalmente, hay otro detalle que debemos tener en cuenta en el enunciado del teorema de Green, la orientaci'on de la curva C debe ser la {} es decir, C debe ser recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, como viste en la asignatura de {Matem'aticas~II}. Esto quiere decir que la parametrizaci'on considerada debe recorrer la curva dejando a la izquierda la región interior. %Nos conformaremos con esta formulaci'on intuitiva.

Sea $C $ una curva de Jordan regular a trozos parametrizada por una función que la recorre en sentido positivo. Sean $ P $ y $ Q$ dos campos escalares de clase C^1 en la región acotada D cuya frontera es C. Entonces se tiene

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy. \tag{22}$$

En otros t'erminos, si $\vec{[1]} = (P, Q)$ es de clase C^1 en D, entonces

$$\oint_C \vec{[1]} \cdot \vec{[1]} = \iint_D \operatorname{rot}(\vec{[1]})\, dA. \tag{23}$$

Si aplicamos el teorema de Green al campo dado por $\vec{[1]}(x, y) = (-y, x)$, obtenemos una f'ormula para hallar el 'area de la regi'on D.

Sea $C $ una curva de Jordan regular a trozos y sea D la región acotada cuya frontera es C. Entonces se tiene que

$$\{\'a\}\text{rea}(D) = \frac{1}{2} \oint_C \big(x\,dy - y\,dx\big). \tag{24}$$

Esta forma de calcular el 'area de una regi'on a partir de los valores que toma el campo $(-y, x)$ en su frontera es la base te'orica de los {} que son aparatos que permiten calcular el 'area de una regi'on irregular dibujada en un mapa deslizando un puntero por su frontera (mira, por ejemplo, {http://www.youtube.com/watch?v=QA8mOW7fvio}.)

Vamos a usar ahora el teorema de Green para ver que, como anunciamos al final de la secci'on anterior, en el plano hay una clase m'as amplia que la de los conjuntos convexos en los que la irrotacionalidad de un campo garantiza que es conservativo en dicho conjunto.

Se dice que un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ es {} si para toda curva de Jordan $ C$ contenida en U, la región acotada D cuya frontera es C verifica $D \subset U$. Gr'aficamente, un conjunto simplemente conexo es un conjunto que no tiene agujeros. Se dice que un conjunto es {} si es conexo pero no es simplemente conexo.

Sea ${F}=(P,Q) $ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Se verifica que $\vec{[1]}$ es conservativo en U si, y solo si, se cumple $ = $ en U.

Como hemos visto, una región m{'u}ltiplemente conexa es una región con agujeros. Si queremos extender el teorema de Green para este tipo de regiones, a la integral de línea sobre la frontera exterior que aparece debemos a{~n}adir integrales a lo largo de curvas que aíslen los agujeros. Por simplicidad, enunciaremos el teorema para el caso de un recinto con dos agujeros (como la regi'on V de la figura anterior).

Sea $U^2 $ un conjunto conexo con dos agujeros cuya frontera exterior es una curva de Jordan regular a trozos C. Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan, regulares a trozos, interiores a C y exteriores entre sí que rodean los agujeros interiores de U. Sean $ P $ y $ Q$ dos campos escalares de clase C^1 en U. Sea D la región contenida en U que es interior a C y exterior a C_1 y a C_2. Entonces se verifica

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C (P\,dx + Q\,dy) - \oint_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) - \oint_{C_2} (P\,dx + Q\,dy). \tag{25}$$

donde las tres curvas C, C_1 y $C_2 $ son recorridas en sentido positivo.

Sean P y Q dos campos escalares de clase C^1 en un conjunto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tales que
$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ en U. Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan regulares a trozos, contenidas en U, que no se cortan y tales que C_1 rodea completamente a C_2. Supongamos que la región anular D comprendida entre C_1 y C_2 se queda contenida en U. Entonces se tiene

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy \tag{26}$$

si ambas se recorren en el mismo sentido.

El teorema de Green admite varias interpretaciones y tiene varias consecuencias que afectan a diferentes maneras de considerar las derivadas de los campos vectoriales. Este conjunto de interpre-ta-ciones y fórmulas se conoce como {} y son de mucha utilidad en las aplicaciones al estudio de los campos electromagn'eticos.

Sea ${F}= (P,Q) U ^2 $ un campo vectorial de clase $C^1(U)$ y sea C una curva de Jordan regular cuya región interior D se queda contenida en U (de manera que podamos aplicar el teorema de Green). Sea $\vec{[1]}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, para $t \in [a, b]$, una parametrización de C que la recorre en sentido positivo. Para cada punto $P = \big(x(t), y(t)\big)$ de la curva consideremos su vector tangente unitario $\vec{[1]}(P)$ y su vector normal exterior unitario $\vec{[1]}(P)$ dados, respectivamente, por

$$\vec{[1]}(P) = \frac{\big(x'(t), y'(t)\big)}{\|\big(x'(t), y'(t)\big)\|} \qquad \text{y} \qquad \vec{[1]}(P) = \frac{\big(y'(t), -x'(t)\big)}{\|\big(x'(t), y'(t)\big)\|} \tag{27}$$

({} es porque apunta en direcci'on a la regi'on exterior a C). Entonces se verifican:

{} La forma de Stokes, o del rotacional, del teorema de Green:

$$\iint_D \operatorname{rot}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C P\, dx + Q\, dy = \oint_C \vec{[1]} \cdot \vec{[1]}\, ds. \tag{28}$$

El nombre de forma del rotacional se debe a que para un campo bidimensional $\vec{[1]} = (P, Q)$ su rotacional es $\operatorname{rot}(\vec{[1]}) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ con lo que la igualdad anterior se puede escribir

$$\iint_D \operatorname{rot}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \oint_C P\, dx + Q\, dy. \tag{29}$$

{} La forma de Gauss, o de la divergencia, del teorema de Green:

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = \oint_C (-Q)\, dx + P\, dy = \oint_C \vec{[1]} \cdot \vec{[1]}\, ds. \tag{30}$$

El nombre de forma de la divergencia se debe a que, como veremos en la Lecci'on 6, la divergencia del campo bidimensional $\vec{[1]} = (P, Q)$ es el campo escalar $\operatorname{div}(\vec{[1]}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

con lo que la igualdad anterior se puede escribir

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{[1]})\, dx\, dy = \oint_C (-Q)\, dx + P\, dy. \tag{31}$$

Si f es un campo escalar de clase C^1 en U se definen su {} \dtf y su {} \dnf en un punto de la curva como, respectivamente, las derivadas direccionales con respecto a los vectores unitarios tangente y normal exterior; es decir $ =f $ y $:=f . $

En las condiciones dadas, sean $f\colon U \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{[1]}\colon U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, ambos de clase C^1 en U. Entonces

$$\iint_D f\, \operatorname{div}(\vec{[1]})\, dA = \oint_C f\, \vec{[1]} \cdot \vec{[1]}\, ds - \iint_D \vec{[1]} \cdot \nabla f\, dA. \tag{32}$$

}

En las condiciones dadas, sean $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ dos campos escalares de clase C^2 en U. Entonces

\align \iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} \,dxdy & = -\oint_C f g \,dx - \iint_D g \frac{\partial f}{\partial y} \,dxdy,\\ \iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} \,dxdy & = \oint_C f g \,dy - \iint_D g \frac{\partial f}{\partial x} \,

}

Comprueba la igualdad que establece el teorema de Green para la circunferencia unidad y el campo $\vec{[1]}(x, y) = (x, 2x)$

Calcula la circulaci'on del campo vectorial $\vec{[1]}(x, y) = (x + 3y, x - y)$ alrededor del tri'angulo de v'ertices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, 4)$.

Sea C la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Sea $\vec{[1]}(x, y) = (-y, x)$. Comprueba, para la curva C y el campo $\vec{[1]}$, la igualdad dada por el teorema de Green.

Sea C la frontera del cuarto de anillo contenido en el primer cuadrante y comprendido entre las circunferencias de centro el origen y radios 1 y 2, respectivamente. Comprueba, para la curva C y el campo $\vec{[1]}(x, y) = (x^2 + y^2 - y, 2xy)$, la igualdad que establece el teorema de Green.

Usando el teorema de Green, calcula la siguiente integral de línea en el arco de la lemniscata C dada por la ecuación polar $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/4]$.

$$\int_C \big(e^x \cos(y) + xy^2\big)\, dx - \big(e^x \operatorname{sen}(y) + x^2 y\big)\, dy. \tag{33}$$

Sea D la regi'on limitada inferiormente por la circunferencia unidad y superiormente por la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ y C su frontera. Consideremos el campo vectorial

$$\vec{[1]}(x, y) = \big(\cos(2xy) - 2xy \operatorname{sen}(2xy) + 2xye^{x^2y}, -2x^2 \operatorname{sen}(2xy) + x^2 e^{x^2y}\big). \tag{34}$$

?`Es $\vec{[1]}$ conservativo en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, calcula una funci'on potencial. Dado $\vec{[1]}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, y)$, calcula directamente la integral $\oint_C (\vec{[1]} + \vec{[1]}) \cdot d\vec{[1]}$.

Comprueba el resultado del apartado anterior usando el teorema de Green.

Comprueba que se da la igualdad dada por el teorema de Green en los siguientes casos. $\vec{[1]}(x, y) = (x, 1)$, en el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$. $\vec{[1]}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)$, en el rect{'a}ngulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ y $(1, 0)$.

$\vec{[1]}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(-y, x)$, en el anillo $0 < a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$.

Sea D el semianillo que est'a contenido en el semiplano superior entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Sea C la frontera del semianillo D. Calcula $ _C y^2 ,dx , + , 3xy , dy$ donde C se recorre en sentido positivo.

Sea $\vec{[1]}$ el campo definido para $(x, y) \neq (0, 0)$ por $ {F}(x,y)=(,). $

Prueba que $\operatorname{rot}(\vec{[1]}) = 0$ en su dominio de definici'on U. ?`Se puede deducir de este resultado que $\vec{[1]}$ es conservativo en U? Explica por qu'e.

Calcula una funci'on potencial de $\vec{[1]}$ en U. ?`Se puede deducir de la existencia del potencial que $\vec{[1]}$ es conservativo en U? Explica por qu'e.

Calcula $ _C F dr$ siendo C el segmento rectilíneo que va desde $A = (3, 4)$ hasta $B = (0, 2)$.

Consideremos ahora el campo $\vec{[1]}$ definido para $(x, y) \neq (0, 0)$ por $\vec{[1]}(x, y) = \vec{[1]}(x, y) + (x, 2x)$ y sea C_R la circunferencia con centro el origen y radio $R > 0$.

Calcula $ _{C_R} G dr$ donde la circunferencia se recorre en sentido positivo.

Sea D el anillo comprendido entre dos circunferencias C_r y C_R, definidas como antes, con $0 < r < R$. Calcula $ _D (G) ,dxdy$ directamente y usando el teorema de Green.

1. Prueba que el campo $\vec{[1]}(x, y) = (3x^2y + 3, x^3 + 2y + 2)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$ y halla una funci'on potencial f tal que $f(1, -1) = 3$.

Calcula la integral de línea $ _{C_1} F dr, $ siendo C_1 el arco de la curva de ecuaci'on $y = x^3$ recorrido desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.

Considera ahora el campo $ G(x,y)=(,,) $ y calcula el rotacional de $\vec{[1]} + \vec{[1]}$. ?`Puedes decir, a partir del valor del rotacional, si $\vec{[1]} + \vec{[1]}$ un campo conservativo en su dominio de definici'on?

Sea C_2 la cardioide definida en coordenadas polares por $r = 1 + \cos(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calcula $ _{C_2} (F + G) dr$ cuando C_2 se recorre en sentido positivo.

Sea C una curva de Jordan, con regi'on interior D y sea f un campo escalar de clase $C^2(U)$ en un dominio U en el que est'an contenidos C y D. Prueba que

$$\oint_C \nabla f \cdot \overrightarrow{[1]}\, ds = \iint_D \nabla^2 f \, dx dy \tag{35}$$

donde $\overrightarrow{[1]}$ es el campo de vectores normales unitarios exteriores a C y $\nabla^2 f$ es el laplaciano de f.

Calculando ambas integrales, comprueba que se verifica la igualdad dada antes en el caso particular en que C es la circunferencia unidad y $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2$.

Dado el campo vectorial $F=(, ,).

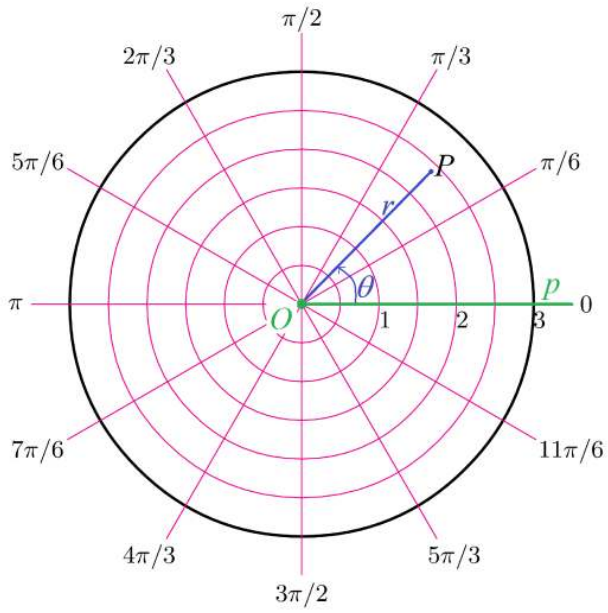
1. Prueba que es irrotacional en su dominio de definici'on.
2. Calcula la circulaci'on de $\overrightarrow{[1]}$ sobre la circunferencia C_a con centro el origen y radio $a \neq 2$.
3. ?`Cu'ales son los dominios conexos m'as grandes en los que puedes garantizar que $\overrightarrow{[1]}$ es conservativo?

6.2 Campos Conservativos is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

Apéndice

Coordenadas polares

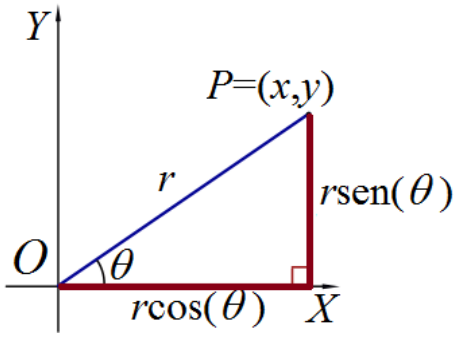
Además del sistema cartesiano, hay otros sistemas de coordenadas que pueden ser más apropiados para representar algunas curvas y magnitudes físicas. El ejemplo más importante en el plano es el de las ***coordenadas polares***. Fijados un punto O llamado polo y una semirrecta p con extremo en O llamada eje polar, las coordenadas polares de un punto P del plano son (r, θ) donde r, el radio o distancia polar, es la distancia de P al polo O y θ, el ángulo polar, es el ángulo (medido en radianes y en sentido positivo) que forma el segmento OP con el eje polar.



Coordenadas polares.

Relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares. En el plano superponemos el sistema de coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas polares de manera que el polo coincide con el origen y el eje polar es el semieje positivo de abscisas. Entonces, las coordenadas polares (r, θ) se relacionan con las coordenadas cartesianas (x, y) como sigue:

- Para pasar de polares a cartesianas: $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$.
- Para pasar de cartesianas a polares: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$ para $x \neq 0$. Si $x = 0$ entonces $\theta = \pi/2$ si $y > 0$ o $\theta = 3\pi/2$ si $y < 0$, mientras que el origen no tiene ángulo polar (en realidad, no hace falta; es el único punto en el que $r = 0$).



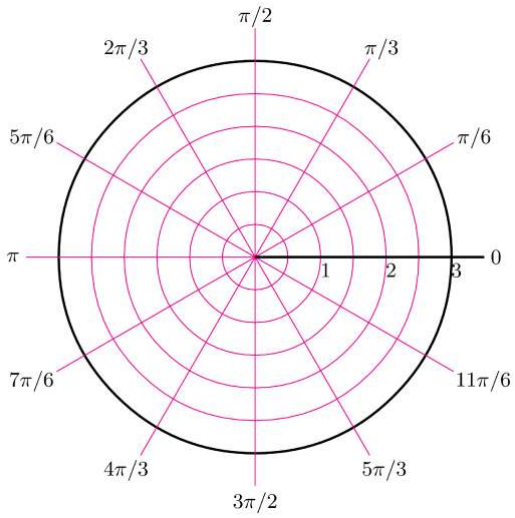
Coordenadas polares y cartesianas.

Las coordenadas polares determinan las coordenadas cartesianas de manera única. Las coordenadas cartesianas determinan la distancia polar de forma única, pero determinan el ángulo polar θ salvo múltiplos enteros de 2π. Habitualmente, la variación de θ

se considera en el intervalo $[0, 2\pi)$ o en el intervalo $(-\pi, \pi]$. En particular, si se usa una calculadora para hallar $\arctan(y/x)$, hay que tener en cuenta los signos de x e y para decidir, según el cuadrante en el que esté el punto (x, y), si el valor de θ es el dado por la calculadora o bien hay que sumar π a dicho resultado.

Curvas en coordenadas polares. Una ecuación de la forma $r = r(\theta)$ permite definir una curva en el plano: la formada por aquellos puntos (x, y) cuyas coordenadas polares verifican $r = r(\theta)$, que se llama ecuación de la curva en coordenadas polares. Para estos puntos, las coordenadas cartesianas x e y son función del ángulo $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta)$ e $y(\theta) = r(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$.

Algunas curvas se describen mejor en polares que en cartesianas. Para dibujarlas a mano alzada, es útil contar con una plantilla como la de la figura, llamada papel polar, en la que aparece una malla de líneas que corresponden a valores constantes del ángulo y a valores constantes del radio (es lo análogo a cuando usamos coordenadas cartesianas en un papel cuadriculado donde las líneas verticales corresponden a $x = \text{constante}$ y las horizontales a $y = \text{constante}$).

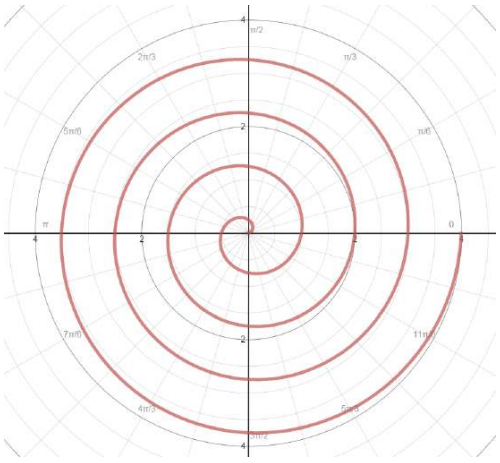


Papel polar ($\theta = 0, \pi/6, \ldots, 11\pi/6$; $r = 0.5, 1, \ldots, 3$.

Ejemplos. Veamos algunos ejemplos de curvas definidas en coordenadas polares.

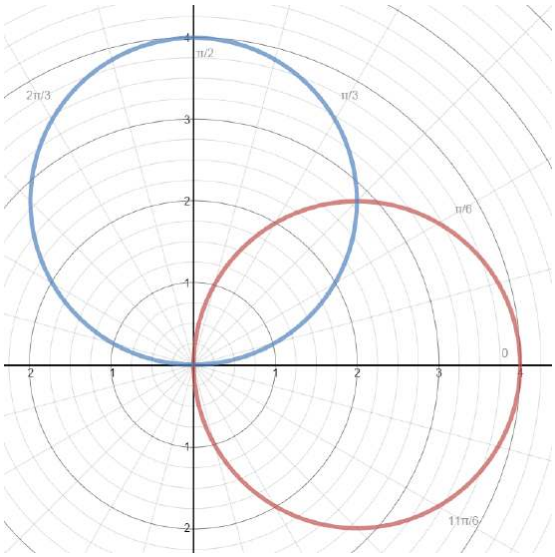
(1) El caso más simple es la circunferencia con centro el origen y radio $a > 0$ cuya ecuación en coordenadas polares es $r(\theta) = a$ para $0 \le \theta \le 2\pi$.

(2) La ecuación $r = a\theta$, con $a > 0$ es una espiral, llamada espiral de Arquímedes.



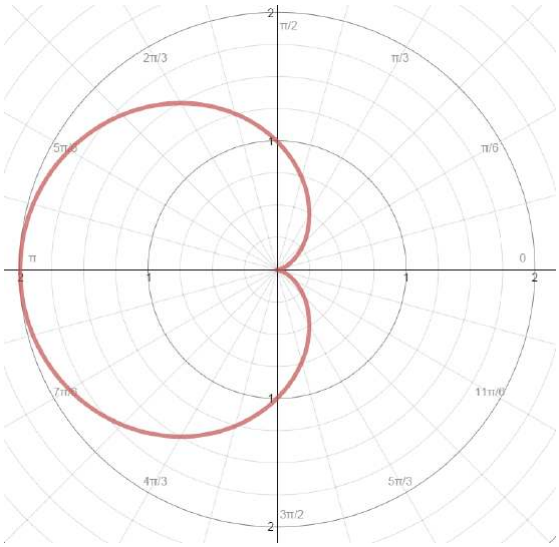
Espiral de Arquímedes $r = \theta/2\pi$.

(3) La circunferencia de radio $a > 0$ cuyo centro es el punto $(a, 0)$. Esta circunferencia es tangente al eje OY en el origen y su ecuación en polares es $r = 2a\cos(\theta)$. Análogamente, la ecuación en polares de la circunferencia de radio $a > 0$ cuyo centro es el punto $(0, a)$ es $r = 2a\,\mathrm{sen}(\theta)$.



Circunferencias con radio 2 y centros $(2,0)$ (roja) y $(0,2)$ (azul).

(4) La curva de ecuación $r = 1 - \cos(\theta)$ se llama cardioide porque parece un corazón.



Cardioide $r = 1 - \cos(\theta)$.

Curvas en coordenadas paramétricas

Funciones vectoriales. Una función vectorial de una variable real es una función $\vec{\mathbf{r}}$ definida para t en un intervalo I cuyos valores son vectores $\vec{\mathbf{r}}(t)$ en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. Las definiciones y los resultados que veamos a continuación se enunciarán para funciones vectoriales en 3D $\vec{\mathbf{r}}(t) \in \mathbb{R}^3$ y valen para funciones 2D sin más que suprimir la tercera coordenada (o considerar que vale 0 y nos movemos en el plano XY del suelo).

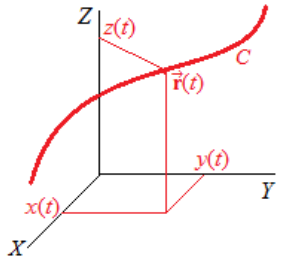
Si escribimos $\vec{\mathbf{r}}(t)$ usando sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}} = x(t)\vec{\mathbf{e}}_1 + y(t)\vec{\mathbf{e}}_2 + z(t)\vec{\mathbf{e}}_3,$$

las funciones $x, y, z\colon t \in I \to x(t), y(t), z(t)\mathbb{R}$ que nos dan las coordenadas se llaman funciones componentes de $\vec{\mathbf{r}}$.

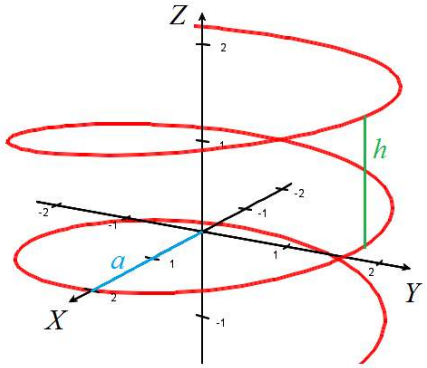
La función vectorial $\vec{\mathbf{r}}(t)$ es continua o es derivable en I si lo son sus funciones componentes y, cuando $\vec{\mathbf{r}}(t)$ es derivable en I, la derivada de $\vec{\mathbf{r}}(t)$ es la función vectorial $\vec{\mathbf{r}}\,'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$.

Curva en coordenadas paramétricas. Una curva en coordenadas paramétricas o curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es la imagen C de una función vectorial continua $\vec{\mathbf{r}}$ definida en un intervalo I. La variable independiente t de la función vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ se llama parámetro de la curva y la propia función $\vec{\mathbf{r}}$ recibe el nombre de parametrización de la curva. Si usamos las funciones componentes $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\vec{\mathbf{i}} + y(t)\,\vec{\mathbf{j}} + z(t)\,\vec{\mathbf{k}}$, entonces la curva es el conjunto de puntos $C = \big\{\big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3 : t \in I\big\}$



Curva en coordenadas paramétricas.

La aplicación CalcPlot3D permite dibujar curvas en 3D introduciendo la parametrización desde el teclado. En el dibujo vemos la hélice circular recta, que viene dada por la parametrización $\vec{\mathbf{r}}(t) = \big(a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), bt\big)$, con $t \in [t_0, t_1]$ donde a es el radio del cilindro en el que se va enrollando la hélice y $h = 2\pi b$ es la distancia vertical entre dos espiras consecutivas, llamada paso de la hélice.



Hélice circular recta.

En el plano, la gráfica de una función f definida en un intervalo I, es decir, la curva $y = f(x)$ es una curva parametrizada en la que el parámetro es la variable x y la parametrización viene dada por $\vec{\mathbf{r}}(x) = \big(x, f(x)\big)$ con $x \in I$. Siguiendo en el plano, la curva dada en coordenadas polares por la ecuación $r = r(\theta)$, con θ en un intervalo I, es una curva parametrizada en la que el parámetro es el ángulo polar θ y la parametrización viene dada por $\vec{\mathbf{r}}(\theta) = \big(r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\big)$ con $\theta \in I$.

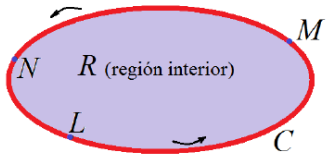
Punto inicial y punto final de una curva. Si I es un intervalo acotado $I = [a, b]$ entonces los puntos $\vec{\mathbf{r}}(a)$ y $\vec{\mathbf{r}}(b)$ se llaman extremos de la curva; $\vec{\mathbf{r}}(a)$ es el punto inicial y $\vec{\mathbf{r}}(b)$ es punto final de la parametrización. Cuando $\vec{\mathbf{r}}(a) = \vec{\mathbf{r}}(b)$ se dice que la curva es cerrada.

Cambio de parámetro. Una misma curva puede representarse mediante distintas parametrizaciones. Si tenemos dos parametrizaciones de una misma curva, digamos $\vec{\mathbf{r}}_1(t)$ con $t \in [a, b]$ y $\vec{\mathbf{r}}_2(u)$ con $u \in [c, d]$, entonces podemos establecer una relación que liga cada valor del parámetro t con el valor del parámetro u que corresponde al mismo punto de la curva: $P = \vec{\mathbf{r}}_1(t) = \vec{\mathbf{r}}_2(u)$. Esta relación define la función que a cada $t \in [a, b]$ le asigna el correspondiente $u = u(t) \in [c, d]$ que se llama cambio de parámetro; naturalmente, la inversa de esta función es el cambio de parámetro que a cada $u \in [c, d]$ le asigna el correspondiente $t = t(u) \in [a, b]$.

Orientación. Diremos que dos parametrizaciones de una misma curva C, $\vec{\mathbf{r}}_1(t)$ con $t \in [a, b]$ y $\vec{\mathbf{r}}_2(u)$ con $u \in [c, d]$, definen la misma orientación o que la recorren en el mismo sentido cuando se verifica que los extremos inicial y final de $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ coinciden:

$\vec{\mathbf{r}}_1(a) = \vec{\mathbf{r}}_2(c)$ y $\vec{\mathbf{r}}_1(b) = \vec{\mathbf{r}}_2(d)$. Por el contrario, si los extremos inicial y final de $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ están intercambiados: $\vec{\mathbf{r}}_1(a) = \vec{\mathbf{r}}_2(d)$ y $\vec{\mathbf{r}}_1(b) = \vec{\mathbf{r}}_2(c)$, se dice entonces que $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ definen sobre la curva orientaciones opuestas.

Esta definición no basta para curvas cerradas ya que en una curva cerrada los extremos coinciden en un mismo punto L. Cuando la curva es cerrada, fijamos dos puntos en la curva M, N distintos del extremo. Diremos que las dos parametrizaciones definen sobre C la misma orientación, o que la recorren en el mismo sentido, cuando, al partir de L como extremo inicial, ambas parametrizaciones pasan antes por M que por N, o bien ambas pasan antes por N que por M.



Orientación en una curva cerrada.

En el caso de curvas cerradas planas hay otras formas de estudiar la orientación. Si C es una curva cerrada plana en el plano XY que no tiene lazos, entonces se dice que C es una curva de Jordan. Diremos que una parametrización recorre una curva de Jordan en sentido positivo cuando la recorre en sentido antihorario, es decir, contrario al de las agujas de un reloj. Si llamamos R a la región interior de C, entonces cuando recorremos la curva en sentido positivo, dejamos la región interior a la izquierda.

La función cambio de parámetro es creciente cuando ambas parametrizaciones definen la misma orientación y es decreciente cuando definen orientaciones distintas.

Recta tangente. Sea C una curva parametrizada por una función $\vec{\mathbf{r}}(t)$ con $t \in I$. Se dice que un punto $P = \vec{\mathbf{r}}(t_0)$ de C es regular cuando $\vec{\mathbf{r}}$ es derivable en t_0, con derivada $\vec{\mathbf{r}}\,'(t)$ continua en dicho punto y $\vec{\mathbf{r}}\,'(t_0) \neq 0$, y la recta tangente a la curva C en el punto P es la recta que pasa por P y tiene como vector director $\vec{\mathbf{r}}\,'(t_0)$, que se llama vector tangente a la curva C en P. Puede probarse que esta definición coincide con la definición habitual de la recta tangente como el límite, cuando Q se mueve sobre la curva tendiendo a P, de las rectas que pasan por P y Q.

Cuando todos los puntos de la curva son regulares, se dice que la parametrización es regular (en otros textos se emplean las palabras lisa o suave). Si el intervalo I puede descomponerse en una cantidad finita de subintervalos en cada uno de los cuales la parametrización es regular, entonces se dice que la parametrización es regular a trozos, es lo que ocurre, por ejemplo, cuando tenemos un polígono o una curva compuesta por tramos que se parametrizan de distinta forma, como un rectángulo.

En los puntos excepcionales $P = \vec{\mathbf{r}}(t_0)$ en los que $\vec{\mathbf{r}}$ no es derivable o en los que $\vec{\mathbf{r}}\,'(t_0) = \vec{\mathbf{0}}$, la noción de recta tangente puede perder su significado ya que en tales puntos la tangente puede no existir o no estar definida en forma única; ejemplos típicos son los picos o esquinas (como los vértices de un cuadrado o el origen para una cardioide).

Vector tangente unitario. Sea C la curva dada por una parametrización regular $\vec{\mathbf{r}}(t)$ con $t \in I$. Se define el vector tangente unitario a C en un punto $P = \vec{\mathbf{r}}(t)$ como $\vec{\mathbf{T}}(t) = \vec{\mathbf{r}}\,'(t)/\|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\|$.

Vector normal y recta normal. Si $\vec{\mathbf{r}}$ es dos veces derivable entonces, derivando en $\|\vec{\mathbf{T}}(t)\|^2 = 1$, se deduce que $2\vec{\mathbf{T}}(t) \cdot \vec{\mathbf{T}}'(t) = 0$, o sea, $\vec{\mathbf{T}}'(t)$ es ortogonal al vector tangente $\vec{\mathbf{T}}(t)$. El vector unitario en la dirección de $\vec{\mathbf{T}}'(t)$ (si éste no es cero) se llama vector normal (a veces, vector normal principal) en el punto $P = \vec{\mathbf{r}}(t)$ y viene dado por $\vec{\mathbf{N}}(t) = \vec{\mathbf{T}}'(t)/\|\vec{\mathbf{T}}'(t)\|$. En este caso, la recta que pasa por P y tiene como vector director $\vec{\mathbf{N}}(t)$ se llama recta normal de la curva en P.

Si $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ son dos parametrizaciones regulares de una misma curva que tienen la misma orientación, entonces ambas definen los mismos vectores unitarios tangentes y normales en cada punto; por el contrario, si tienen distinta orientación, entonces definen vectores tangentes unitarios opuestos.

El plano que pasa por P y tiene como vectores directores $\vec{\mathbf{T}}(t)$ y $\vec{\mathbf{N}}(t)$ se llama plano osculador a la curva en P y, en cierta forma, es el que mejor se aproxima a la curva; de hecho, si la curva está contenida en un plano de $\mathbb{R}^3$, entonces ése es su plano osculador. Cuando la curva representa la trayectoria de una partícula desplazándose en el espacio 3D, de manera que el parámetro t es el tiempo, el plano osculador coincide con el plano que en cada instante contiene el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{r}}\,'(t)$ y el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{r}}\,''(t)$. En particular, el plano osculador también puede construirse comoel plano que pasa por P y tiene como vectores directores $\vec{\mathbf{r}}\,'(t)$ y $\vec{\mathbf{r}}\,''(t)$ si éstos son linealmente independientes.

Triedro de Frenet. Si $\vec{\mathbf{r}}$ es una parametrización regular dos veces derivable de una curva en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{\mathbf{T}}'(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$, entonces a los vectores unitarios $\vec{\mathbf{T}}(t)$ y$\vec{\mathbf{N}}(t)$ les podemos añadir un tercer vector unitario, su producto vectorial $\vec{\mathbf{B}}(t) = \vec{\mathbf{T}}(t) \times \vec{\mathbf{N}}(t)$, llamado vector binormal, de manera que $\left\{\vec{\mathbf{T}}(t), \vec{\mathbf{N}}(t), \vec{\mathbf{B}}(t)\right\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Esta base se conoce como el triedro de Frenet de la curva en $P = \vec{\mathbf{r}}(t)$ y se emplea en las aplicaciones mecánicas. El vector binormal $\vec{\mathbf{B}}(t)$ es perpendicular al plano osculador y, por tanto, es constante cuando la curva es plana. El $\vec{\mathbf{B}}(t)$ también puede construirse como un vector unitario paralelo a $\vec{\mathbf{r}}\,'(t) \times \vec{\mathbf{r}}\,''(t)$, si estos vectores son linealmente independientes.

Longitud de una curva parametrizada. Sea C la curva dada en $\mathbb{R}^3$ por una parametrización regular a trozos $\vec{\mathbf{r}}(t)$ con $t \in [a, b]$. Entonces, la longitud de C viene dada por la integral

$$\text{longitud de } C = \int_a^b \|\vec{\mathbf{r}}\,'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2} \, dt,$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclídea o, en otros términos, el módulo del vector.

Esta definición se justifica aproximando la curva mediante poligonales inscritas en ella. Al considerar las longitudes de estas poligonales se obtiene una suma de Riemann que corresponde a la integral anterior. Puesto que una misma curva puede venir dada por parametrizaciones distintas, deberíamos asegurarnos de que la longitud, que se obtiene como el valor de una integral que depende de la parametrización, es la misma cualquiera que sea la parametrización elegida. Esto se puede hacer usando el teorema del cambio de variable para integrales.

Salvo en algunos casos muy simples, las integrales que dan lugar el cálculo de la longitud de una curva no admiten primitivas manejables, por lo que hay que acudir a métodos numéricos para calcularlas. El caso más notable es el de la longitud de una elipse $\vec{\mathbf{r}}(t) = \big(a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)\big)$ con $t \in [0, 2\pi]$, cuya longitud viene dada por la integral $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}\; dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2(t)}\; dt$ cuyo integrando no admite una primitiva expresable como una función elemental si $a \neq b$. Estas integrales se llaman integrales elípticas.

Apéndice is shared under a not declared license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.

Index

Glossary

Sample Word 1 | Sample Definition 1

Detailed Licensing

Overview

Title: Cálculo en Varias Variables (ETS Ingeniería de la Universidad de Sevilla)

Webpages: 26

All licenses found:

- Undeclared: 100% (26 pages)

By Page

- Cálculo en Varias Variables (ETS Ingeniería de la Universidad de Sevilla) - *Undeclared*
  - Front Matter - *Undeclared*
    - TitlePage - *Undeclared*
    - InfoPage - *Undeclared*
    - Table of Contents - *Undeclared*
    - Licensing - *Undeclared*
  - 1. DERIVADAS PARCIALES - *Undeclared*
    - 1.1. Campos escalares - *Undeclared*
    - 1.2. Gráfica de un campo escalar - *Undeclared*
    - 1.3. Derivadas parciales - *Undeclared*
    - 1.4. Campos escalares diferenciables - *Undeclared*
    - 1.5. La regla de la cadena - *Undeclared*
    - 1.6. Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente - *Undeclared*
    - 1.7. El teorema de Taylor - *Undeclared*
  - 2. ECUACIONES IMPLÍCITAS - *Undeclared*
    - 2.1. Curvas definidas implícitamente en el plano - *Undeclared*
    - 2.2. Superficies definidas implícitamente en el espacio - *Undeclared*
    - 2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio - *Undeclared*
  - 6. INTEGRALES DE LÍNEA - *Undeclared*
    - 6.1 Integrales de Línea - *Undeclared*
    - 6.2 Campos Conservativos - *Undeclared*
  - Apéndice - *Undeclared*
  - Back Matter - *Undeclared*
    - Index - *Undeclared*
    - Glossary - *Undeclared*
    - Detailed Licensing - *Undeclared*