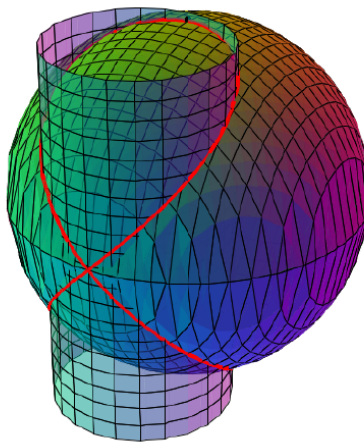


2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio

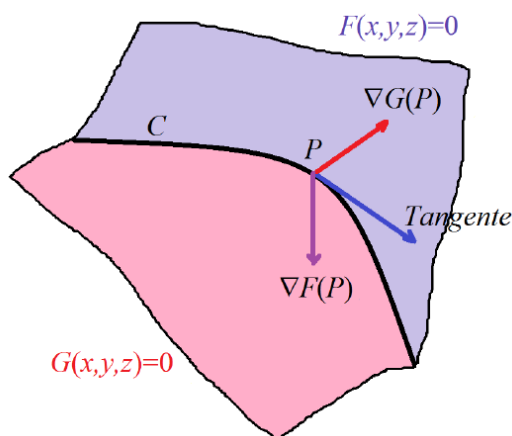
Curvas dadas por la intersección de dos superficies

Dados dos campos escalares $F(x, y, z)$ y $G(x, y, z)$, los puntos (x, y, z) que cumplen $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ forman, en general, una curva C en el espacio tridimensional. Entonces se dice que estas ecuaciones **definen implícitamente la curva C** y se llaman **ecuaciones implícitas de C** . El ejemplo más simple es la definición de una recta como intersección de dos planos. Otro ejemplo son las cónicas, definidas en 3D como la intersección de un cono y un plano, o las curvas dadas por la intersección de dos cuádricas, como la curva de Viviani, que es la curva en forma de 8 dada por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cilindro circular $x^2 + y^2 = x$, en otras palabras, es el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x, y, z) son las soluciones de las ecuaciones $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - x = 0$.



La curva de Viviani.

Recta tangente a una curva dada por la intersección de dos superficies. Para ver que el conjunto C de los puntos (x, y, z) que cumplen $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ es una curva, lo ideal sería despejar dos de las variables en función de la tercera, que podría usarse como parámetro de la curva. Si C es una curva, entonces está contenida en ambas superficies, luego que el vector tangente a C en un punto P debe ser ortogonal tanto a $\nabla F(P)$ como a $\nabla G(P)$. En consecuencia, el producto vectorial $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ es, si no es el vector nulo, tangente a la curva en P , luego la condición debe ser que $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$ sean linealmente independientes para que $\nabla F(P) \times \nabla G(P) \neq \vec{0}$.



Curva dada por ecuaciones implícitas.

Teorema de la función implícita para una curva en el espacio o para dos ecuaciones con tres variables.

Teorema de la función implícita (3D, dos ecuaciones). Sean F y G funciones de clase $C^n(U)$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto interior del dominio U tal que $F(P) = 0$ y $G(P) = 0$. Si los vectores gradientes $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$ son linealmente independientes, entonces cerca del punto P los puntos (x, y, z) que cumplen $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ forman una curva C que podemos parametrizar usando una de las variables como parámetro.

Concretamente, si $\nabla F(P)$ y $\nabla G(P)$ son linealmente independientes, entonces $\nabla F(P) \times \nabla G(P) \neq \vec{0}$ y podemos usar como parámetro de la curva cualquiera de las variables cuya coordenada correspondiente en $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ no sea cero. Así, por ejemplo, si la primera coordenada de $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ no es cero, entonces podemos usar x como parámetro y despejar y, z en función de x cerca de P , en el sentido de que existen un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ centrado en el punto x_0 y dos únicas funciones escalares $y(x)$ y $z(x)$ de clase $C^n(I)$ tales que $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ y $(x, y = y(x), z = z(x))$ es una solución del sistema de ecuaciones $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ para cada $x \in I$. Además, las derivadas $y'(x)$ y $z'(x)$ vienen dadas para cada $x \in I$ por la solución única del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} F_y(x, y(x), z(x))y'(x) + F_z(x, y(x), z(x))z'(x) &= -F_x(x, y(x), z(x)) \\ G_y(x, y(x), z(x))y'(x) + G_z(x, y(x), z(x))z'(x) &= -G_x(x, y(x), z(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

Se dice, en este caso, que **las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ definen implícitamente las variables y, z como funciones $y(x), z(x)$ de la variable x cerca del punto P .**

En estas condiciones, el trozo de curva C cerca de P podemos parametrizarlo, usando x como parámetro, mediante $\vec{r}: x \in I \rightarrow \vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Entonces, un vector tangente a la curva en un punto $(x, y = y(x), z = z(x))$ es $\vec{r}'(x) = (1, y'(x), z'(x))$ que, como se deduce del sistema de ecuaciones anterior, es ortogonal tanto a ∇F como a ∇G y, por tanto, paralelo al producto vectorial $\nabla F \times \nabla G$, como habíamos adelantado.

Como en los casos de curvas en el plano y de superficies en el espacio, el papel de las variables es intercambiable, de manera que si la segunda coordenada de $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ no es cero, entonces podemos usar y como parámetro y despejar x, z en función de y cerca de P , mientras que si la tercera coordenada de $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ no es cero, entonces podemos usar z como parámetro y despejar x, y en función de z cerca de P .

Procedimiento de derivación implícita

Volviendo al caso en que las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ definen implícitamente las variables y, z como funciones de la variable x cerca del punto P , el procedimiento de derivación implícita para ir calculando las sucesivas derivadas de $y(x)$ y $z(x)$ consiste en derivar simultáneamente las dos igualdades $F(x, y(x), z(x)) = 0$, $G(x, y(x), z(x)) = 0$ para $x \in I$, sustituir los valores previamente obtenidos y resolver el sistema correspondiente. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos la intersección de la superficie dada por $x^2 + y^2 + z^3 = 2$ con el plano $x + y + z = 2$. El punto $P = (0, 1, 1)$ está en dicha intersección. Los campos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - 2$ y $G(x, y, z) = x + y + z - 2$ son de clase $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Además, $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 3z^2)$ y $\nabla G(x, y, z) = (1, 1, 1)$ cumplen que $\nabla F(P) = (0, 2, 3)$ y $\nabla G(P) = (1, 1, 1)$ son linealmente independientes y la primera componente de $\nabla F(P) \times \nabla G(P) = (-1, 3, -2)$ no es cero, así que el teorema de la función implícita nos dice que las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^3 = 2$ y $x + y + z = 2$ definen implícitamente, cerca del punto $P = (0, 1, 1)$, una curva C en la que las variables y, z son funciones $y(x), z(x)$ de la variable x que se mueve en un intervalo I centrado en $x_0 = 0$ y cumplen $y(0) = 1, z(0) = 1$. Sería muy complicado calcular las expresiones explícitas de estas funciones $y(x), z(x)$, pero podemos calcular sus derivadas en $x_0 = 1$ y, por tanto, sus polinomios de Maclaurin.

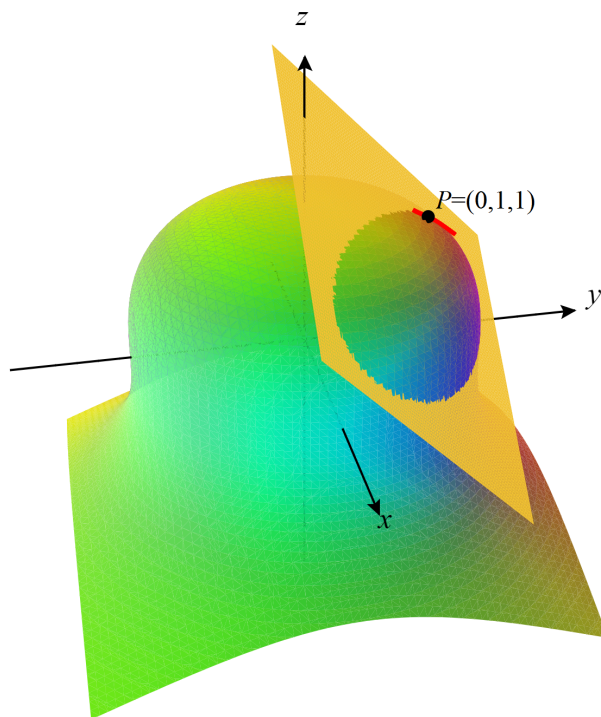
Derivamos con respecto a x en las igualdades $x^2 + y^2 + z^3 = 2$ y $x + y + z = 2$, usando ya que y, z son funciones de $x \in I$ (pero suprimiendo el argumento (x) de las funciones $y(x), z(x), y'(x), z'(x), \dots$ por claridad). Entonces nos queda $2x + 2yy' + 3z^2z' = 0$ y $1 + y' + z' = 0$ para $x \in I$. Tomando $x = 0$ y usando que $y(0) = 1, z(0) = 1$, obtenemos $2y'(0) + 3z'(0) = 0$ e $y'(0) + z'(0) = -1$. Resolviendo este sistema obtenemos $y'(0) = -3$ y $z'(0) = 2$.

Ahora, derivando con respecto a x las igualdades $2x + 2yy' + 3z^2z' = 0$ y $1 + y' + z' = 0$ para $x \in I$, obtenemos $2 + 2(y')^2 + 2yy'' + 6z(z')^2 + 3z^2z'' = 0$ e $y'' + z'' = 0$ para $x \in I$. Poniendo $x = 0$ y usando que $y(0) = 1, z(0) = 1, y'(0) = -3, z'(0) = 2$, nos queda $2y''(0) + 3z''(0) = -44$ e $y''(0) + z''(0) = 0$, con lo que $y''(0) = 44$ y $z''(0) = -44$.

Volviendo a derivar obtenemos $6y'y'' + 2yy''' + 6(z')^3 + 18zz'z'' + 3z^2z''' = 0$ e $y''' + z''' = 0$ para $x \in I$. Tomando $x = 0$ y los valores anteriormente obtenidos queda $2y'''(0) + 3z'''(0) = 2328$ e $y'''(0) + z'''(0) = 0$. Resolviendo este sistema nos queda $y'''(0) = -2328$ y $z'''(0) = 2328$. Entonces, los polinomios de Maclaurin de grado 3 de $y(x)$ y $z(x)$ son, respectivamente,

$$y(x) \approx p_3(x) = 1 - 3x + 22x^2 - 388x^3, \quad z(x) \approx q_3(x) = 1 + 2x - 22x^2 + 388x^3.$$

En la figura vemos la superficie $x^2 + y^2 + z^3 = 2$ (los tonos verdesos y violeta al fondo), el plano $x + y + z = 2$ (en amarillo oscuro), el punto $P = (0, 1, 1)$ (en negro) y la aproximación de la curva C (en rojo) dada por la parametrización $x, y(x) \approx p_3(x), z(x) \approx q_3(x)$ con $-0.05 < x < 0.05$.



Corte de la superficie $x^2 + y^2 + z^3 = 2$ con el plano $x + y + z = 2$.

Ejercicios

Utiliza la aplicación [CalcPlot3D](#) para dibujar las gráficas de las superficies que aparecen en los ejercicios.

Ejercicio 1. Calcula la recta tangente en $P = (0, 0, 2)$ a la curva C obtenida al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el paraboloide $x^2 + z^2 = y + 4$.

Ejercicio 2. Sea C la curva dada por la intersección del paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ con el cilindro $x^2 + z^2 = 2x$. Calcula las ecuaciones continuas de la recta tangente a C en el punto $P = (1, 0, 1)$.

Ejercicio 3. Sea C la elipse obtenida al cortar el elipsoide $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16$ con el plano $x + y + 2z = 5$. Prueba que cerca del punto $P = (0, 1, 2)$ se pueden despejar las variables y y z de dicha elipse en función de la variable x y calcula los correspondientes polinomios de Maclaurin de grado 3.

Ejercicio 4. Prueba que el sistema de ecuaciones $x^2 + zy^2 + z^3 = 1$, $x + y + z = 1$ define implícitamente las variables y, z como funciones $y(x), z(x)$ cerca de $P = (0, 0, 1)$ y calcula los correspondientes polinomios de Maclaurin de grado 2 de dichas funciones $y(x), z(x)$.

Ejercicio 5. Sea C la curva dada por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$. Prueba que cerca de $P = (1, 1, 1)$ se pueden despejar las variables x e y de la curva como funciones de z y calcula los polinomios de Taylor de orden 3 de las correspondientes funciones alrededor del punto $z_0 = 1$.

Ejercicio 6. Sea C la curva dada por las ecuaciones implícitas $x + y + z^2 = 0$ y $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Prueba que cerca del punto $P = (1, -1, 0)$ se pueden despejar las variables y, z de la curva como funciones de x y calcula los polinomios de Taylor de

orden 3 de las correspondientes funciones alrededor del punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 7. Sea S la superficie de ecuación implícita $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + z = 1$.

1. Prueba que dicha ecuación implícita permite definir z como una función de x e y , que denotaremos por $z = f(x, y)$, cerca de $P = (0, -1, 0)$.
2. Determina la dirección según la cual la derivada direccional de f en el punto $(0, -1)$ es máxima y calcula el valor de dicha derivada direccional.
3. Determina la ecuación del plano tangente a S en P .
4. Al cortar la superficie S con el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se obtiene una curva C que pasa por P . Halla la recta tangente a la curva C en el punto P y su curvatura en dicho punto P .

Ejercicio 8. Sea C la curva dada por las ecuaciones $y^2 + z^2 - x^2 + 2 = 0$ e $yz + xz - xy - 1 = 0$.

1. Prueba que es posible parametrizar un tramo de C cerca del punto $P = (2, 1, 1)$ tomando la variable x como parámetro.
2. Halla el vector \vec{u} que es tangente a la curva C en el punto P , es unitario y apunta en el sentido de subida de C en dicho punto.
3. Dado el campo escalar $f(x, y, z) = -xy - y^2 + xyz + z^2 + 2y - 2$, halla la derivada direccional de f en P en la dirección de \vec{u} .

2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio is shared under a [not declared](#) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.