

1. DERIVADAS PARCIALES

Este **CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES** recoge el contenido de la asignatura cuatrimestral *Matemáticas III* que se imparte en el primer curso del Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales de la Universidad de Sevilla (España) y está dedicado a estudiar el cálculo diferencial e integral de los campos escalares y de los campos vectoriales. Los campos escalares son funciones que dependen de dos o más variables cuyos valores son números reales y se utilizan para representar las magnitudes escalares (longitud, área, volumen, distancia, presión, temperatura, densidad, voltaje, resistencia, etc.) que aparecen en los modelos más comunes en la ingeniería. Los campos vectoriales son funciones que dependen de dos o más variables cuyos valores son vectores y se utilizan para representar las magnitudes vectoriales (posición, velocidad, aceleración, fuerza, etc.) que también aparecen en los modelos de la ingeniería.

El objetivo principal de este primer capítulo **1. DERIVADAS PARCIALES** es explicar cómo se extiende el concepto de derivada de una función de una variable a campos escalares de varias variables y algunas de sus propiedades analíticas y geométricas. Empezamos con la sección **1.1. Campos escalares**, dedicada a definir y presentar ejemplos de campos escalares, junto con las nociones intuitivas de dominio, límite y continuidad. En la sección **1.2. Gráfica de un campo escalar** definimos el concepto de gráfica de un campo escalar de dos variables $f(x, y)$ y su visualización como la superficie de ecuación $z = f(x, y)$, así como la representación alternativa de un campo escalar mediante sus curvas de nivel. En la sección **1.3. Derivadas parciales** se introducen las derivadas parciales, que son las que se obtienen derivando una función de varias variables con respecto a una de ellas cuando se dejan las demás constantes y se estudia su interpretación geométrica, cómo se calculan y se introducen las derivadas parciales segundas, terceras, etc. El concepto de derivada de una función $f'(x)$ surge como solución del problema de trazar la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto. Para un campo de dos variables $f(x, y)$ nos plantearemos en la sección **1.4. Campos escalares diferenciables** el problema de hallar el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en un punto de dicha superficie y veremos que de dicho planteamiento surge, de manera natural y por analogía con la definición de derivada, la noción de gradiente o diferencial de un campo escalar de dos variables. En esta analogía desempeñan un papel fundamental las derivadas parciales. En la sección **1.5. La regla de la cadena** estudiaremos con detalle, por su importancia teórica y práctica, las fórmulas para el cálculo de derivadas parciales cuando se hace un cambio de variables y veremos algunas consecuencias en la sección **1.6. Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente**. Finalmente, en la sección **1.7 El teorema de Taylor** veremos cómo aproximar los valores de un campo escalar mediante la evaluación de un polinomio que, en el caso particular del polinomio de Taylor de grado 2, usaremos más adelante para saber si los puntos críticos de un campo escalar, los puntos donde su derivada vale cero, son máximos o mínimos locales.

Aquí puedes enlazar directamente con el contenido de las secciones.

[Campos escalares](#)

[Gráfica de un campo escalar](#)

[Derivadas parciales](#)

[Campos escalares diferenciables](#)

[La regla de la cadena](#)

[Las derivadas direccionales y las propiedades del gradiente](#)

[El teorema de Taylor](#)

Breves notas históricas

Las primeras funciones de dos variables que aparecen son las ecuaciones implícitas que definen curvas en el plano utilizadas por René Descartes y hay algunas trazas del empleo de derivadas parciales por parte de Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz y sus seguidores a finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. A lo largo de este siglo se plantean problemas con funciones que dependen de varias variables, como el problema de la cuerda vibrante: hallar, en función de su abscisa x y el tiempo t , la ordenada $y(x, t)$ de cada punto (x, y) de una cuerda que vibra en un plano.

Fue Nicholas Bernoulli quien, estudiando en 1716 el problema de las trayectorias ortogonales a una familia de curvas, definió específicamente el concepto básico de derivada parcial para funciones que dependen de varias variables y la noción de diferencial y fue, asimismo, el primero en indicar, en 1721, el hecho de que las derivadas parciales cruzadas son iguales. La primera demostración rigurosa de la igualdad de las derivadas cruzadas, bajo las condiciones adecuadas que hemos visto, fue dada por Hermann A. Schwarz en 1873.

A partir de los trabajos de Nicholas Bernoulli, Leonhard Euler y el grupo de matemáticos franceses del siglo XVIII, Alexis Clairaut, Alexis Fontaine y Joseph Louis Lagrange aplicaron las nociones de derivada parcial, derivada direccional, plano tangente, etc., en la resolución de varios problemas, como iremos viendo a lo largo de esta asignatura. Será a lo largo del siglo XIX cuando se establezcan los fundamentos y resultados principales del cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables; resultados que se obtuvieron, en su mayor parte, en el contexto del desarrollo de la física, especialmente del electromagnetismo, y están asociados a los nombres de Carl F. Gauss, George Green, Augustin L. Cauchy (a quien se debe la extensión del teorema de Taylor a los campos escalares obtenida en 1829), Mijail Ostrogradski, Bernhard Riemann, William R. Hamilton, y Carl G. Jacobi, Otto Hesse (que introdujo la noción de matriz hessiana de un campo escalar en 1857) y, ya a principios del siglo XX, William H. Young y Henri Lebesgue.

Sin embargo, el concepto de qué es una función diferenciable no fue formulado con claridad hasta bien entrado el siglo XIX; parece haber sido el matemático alemán Carl J. Thomae el primero en cuestionar, en 1873, si para una función de dos variables puede decirse legítimamente que es diferenciable cuando simplemente existen sus derivadas parciales. Fueron matemáticos de finales de ese siglo quienes, poco a poco, lograron cristalizar el concepto de diferenciabilidad aclarando la necesidad e importancia de la hipótesis de que las derivadas parciales sean continuas. La primera definición de función diferenciable como la que hemos visto, parece haber sido dada por el matemático alemán Otto Stolz en 1887. Trabajos posteriores, ya a comienzos del siglo XX, de James Pierpoint y William H. Young, en los que aparece por primera vez la continuidad de las derivadas parciales como condición suficiente para la diferenciabilidad, y Maurice Fréchet llevan a éste último a definir en 1911 la noción de función diferenciable en espacios generales que se usa hoy en día.

La extensión a conjuntos generales de la noción de punto interior o punto de la frontera dio lugar, tras los trabajos pioneros de Georg Cantor a finales del siglo XIXy, sobre todo, el de Felix Hausdorff en 1914, a la rama de las matemáticas conocida como topología (el "estudio de los lugares").

1. DERIVADAS PARCIALES is shared under a [not declared](#) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.