

2. ECUACIONES IMPLÍCITAS

A lo largo de tus estudios previos de matemáticas te han ido apareciendo ejemplos de curvas planas definidas como los puntos (x, y) que cumplen una cierta ecuación $f(x, y) = 0$ que establece una relación entre las variables x e y . El ejemplo más conocido es la circunferencia de radio $a > 0$, dada por la ecuación implícita $f(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Otros ejemplos son las cónicas, las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales de variables separadas o las curvas de nivel de un campo escalar. Dichas curvas reciben el nombre de curvas definidas implícitamente y la ecuación $f(x, y) = 0$ se llama ecuación implícita de la curva.

En 3D, ejemplos típicos de superficies dadas de forma implícita son el plano, dado en general por la ecuación $ax + by + cz = d$, la esfera de centro el origen y radio ρ , dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, o el cilindro recto de radio r , dado por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. En otro orden de cosas, si un plano $ax + by + cz = d$ y una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ se cortan, el resultado es una circunferencia que viene dada por dos ecuaciones implícitas, la del plano y la de la esfera.

En estos ejemplos sabemos que, efectivamente, las ecuaciones definen, respectivamente, curvas en 2D y superficies o curvas en 3D, pero ¿es así en general?, es decir, ¿las soluciones de una ecuación $f(x, y) = 0$ forman siempre una curva en 2D?, ¿las soluciones de una ecuación $f(x, y, z) = 0$ forman siempre una superficie en 3D?, ¿las soluciones de un sistema de dos ecuaciones $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ forman siempre una curva en 3D? Las condiciones que nos dan respuesta afirmativa a estas preguntas se conocen, genéricamente, como teoremas de la función implícita. Estos teoremas, como veremos, son locales, es decir, dan respuesta positiva pero cerca de un punto, no de forma global.

Dedicamos este Capítulo **2. ECUACIONES IMPLÍCITAS** a responder estas preguntas en 2D y 3D mediante diversas versiones del teorema de la función implícita. En la primera sección, **2.1. Curvas definidas implícitamente en el plano**, nos centraremos en el caso bidimensional, estudiando las condiciones que garantizan que de una ecuación $f(x, y) = 0$ podemos despejar una de las variables en función de la otra, por ejemplo $y = y(x)$, de forma que las soluciones de la ecuación implícita coincidan con los puntos de la curva explícita $y = y(x)$. Como en la práctica suele ser imposible obtener la expresión explícita, la fórmula, de $y(x)$, veremos el procedimiento de derivación implícita para calcular las derivadas de $y'(x), y''(x), \dots$, y, por ejemplo, poder construir sus polinomios de Taylor en un punto.

En la segunda sección, **2.2. Superficies definidas implícitamente en el espacio**, pasamos al caso tridimensional estudiando las condiciones que garantizan que de una ecuación con tres variables $f(x, y, z) = 0$ podemos despejar una de las variables en función de las otras dos y cómo, mediante derivación implícita, calcular las derivadas parciales de esta función cuando no sea posible, en la práctica, obtener su expresión como una superficie explícita.

Finalmente, en la sección **2.3. Curvas definidas implícitamente en el espacio**, estudiamos el caso de dos ecuaciones con tres variables $f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0$ analizando cuándo podemos despejar dos de las variables en función de la tercera, que podríamos usar como parámetro de la curva que forman las soluciones de dicho sistema, y cómo calcular las derivadas de estas funciones.

Aquí puedes enlazar directamente con el contenido de las secciones.

[Curvas definidas implícitamente en el plano](#)

[Superficies definidas implícitamente en el espacio](#)

[Curvas definidas implícitamente en el espacio](#)

Breves notas históricas

René Descartes fue el primero, en 1637, que trabajó con cónicas definidas de forma implícita para calcular las rectas tangentes. Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz, a finales del siglo XVII, y los matemáticos del siguiente siglo trabajaron con curvas más generales definidas de forma implícita $F(x, y) = 0$, asumiendo con toda naturalidad que se puede despejar y en función de x como una función $y = y(x)$ para hallar el desarrollo de Taylor de $y(x)$. A caballo entre los siglos XVIII y XIX, Joseph Louis Lagrange y Augustin L. Cauchy dieron los primeros resultados de existencia de la función $y = y(x)$ para funciones que se pueden escribir como series de potencias. El resultado general conocido como teorema de la función implícita, que estudiamos aquí para casos especiales, fue finalmente probado por el matemático italiano Ulisse Dini en 1878.

2. ECUACIONES IMPLÍCITAS is shared under a [not declared](#) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.