

### 3: Composición de Funciones. Regla de la Cadena

Si la imagen de una función  $\mathbf{f}$  está contenida en el dominio de una función  $\mathbf{g}$ , puede aplicarse  $\mathbf{g}$  a los valores  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y obtener la composición  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ .

Por ejemplo,  $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mathbf{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))$  puede componerse con la función  $g(x, y) = x^2 + y^2$  o con  $g(x, y) = \sin(xy^3) + x^2y$ , obteniendo, respectivamente, las funciones  $g \circ \mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $(g \circ \mathbf{f})(t) = g(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) \equiv 1$  y  $(g \circ \mathbf{f})(t) = g(\cos(t), \sin(t)) = \sin(\cos(t) \sin^3(t)) + \cos^2(t) \sin(t)$ . Para las funciones  $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$  y  $\mathbf{h}(t) = (\cos(t), \sin(t))$  podemos considerar la composición  $\mathbf{h} \circ \mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que se expresa por

$$(\mathbf{h} \circ \mathbf{f})(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{h}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = (\cos(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3), \sin(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)) \quad (3.1)$$

pero no  $\mathbf{f} \circ \mathbf{h}$ , ya que la imagen de  $\mathbf{h}$  está contenida en  $\mathbb{R}^2$  y el dominio de  $\mathbf{f}$  es  $\mathbb{R}^3$ . En general, consideramos composiciones de funciones  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ , donde  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; analizamos las  $m$  coordenadas de la composición y, para cada una de ellas, estudiamos las respectivas derivadas parciales con respecto a las  $n$  variables. Por ello, en los ejemplos nos centraremos en el caso  $m = 1$ .

#### Regla de la Cadena

*Dadas dos funciones derivables  $f$  y  $g$  con dominio e imagen en  $\mathbb{R}$  y su composición  $g \circ f$ , se calcula la derivada de la función  $g \circ f$  a través de la denominada regla de la cadena. En concreto,  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .*

#### ✓ Ejemplo 3.9

La función  $f(x) = x^2$  se compone con la función  $g(x) = e^x$  y da lugar a  $(g \circ f)(x) = e^{x^2}$ , cuya derivada es  $(g \circ f)'(x) = e^{x^2} 2x$ . Análogamente,  $(f \circ g)(x) = (e^x)^2$  (de hecho,  $(f \circ g)(x) = e^{2x}$ ) y por la regla de la cadena  $(f \circ g)'(x) = 2e^x e^x = 2e^{2x}$ .

Veamos cómo operar en el caso en que las funciones tengan dominio o imagen en  $\mathbb{R}^d$ , con  $d > 1$ .

- $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Utilizamos las variables  $s, t$  para  $\mathbf{f}$  y la variable  $x$  para  $g$ . Entonces  $y = g(x) = (g \circ \mathbf{f})(s, t) := F(s, t)$  y

$$\frac{\partial}{\partial s} F = \frac{d}{dx} g \frac{\partial}{\partial s} f \quad (3.2)$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \frac{d}{dx} g \frac{\partial}{\partial t} f \quad (3.3)$$

#### ✓ Ejemplo 3.10

Si  $\mathbf{f}(s, t) = s(1 - t^3)$  y  $g(x) = e^x$ , la función  $F(s, t) = (g \circ \mathbf{f})(s, t) = g(s(1 - t^3)) = e^{s(1 - t^3)}$  tiene como gradiente  $\nabla F(s, t) = (e^{s(1 - t^3)}(1 - t^3), e^{s(1 - t^3)}s(-3t^2))^T$ .

- $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Utilizamos las variables  $s, t$  para  $\mathbf{f}$  y las variables  $x, y$  para  $g$ . Entonces  $z = g(x, y) = (g \circ \mathbf{f})(s, t) := F(s, t)$  y

$$\frac{\partial}{\partial s} F = \frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial}{\partial s} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} g \frac{\partial}{\partial s} f_2 \quad (3.4)$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial}{\partial t} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} g \frac{\partial}{\partial t} f_2 \quad (3.5)$$

### ✓ Ejemplo 3.11

Si  $(x, y) = \mathbf{f}(s, t) = (s^2t, s(4 - 3t))$ ,  $g(x, y) = \cos(x - 2y)$  y  $F$  es la función  $F(s, t) := (g \circ \mathbf{f})(s, t) = g(s^2t, s(4 - 3t)) = \cos(s^2t - 2s(4 - 3t))$  admite derivadas parciales. Calcula directamente la derivada parcial con respecto a cada una de las variables y hazlo usando la regla de la cadena multivariante para ver que coinciden.

- Si  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  admiten derivadas parciales, las de la función  $F = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  vienen dadas, para cada  $1 \leq j \leq n$ , por

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} g \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \quad (3.6)$$

### ✓ Ejemplo 3.12

La composición de  $\mathbf{f}(s, t) = (e^{s-t}, \cos(s^2t))$  y  $g(x, y) = (x^2, x - y^3)$  da lugar a la función  $F(s, t) = ((e^{s-t})^2, e^{s-t} - (\cos(s^2t)))$ . Utiliza de nuevo la doble vía para comprobar la fórmula de las derivadas parciales en este caso.

This page titled [3: Composición de Funciones. Regla de la Cadena](#) is shared under a [not declared](#) license and was authored, remixed, and/or curated by [Joaquín López Herraiz](#).