

## 4.2: Solución

Vamos a aplicar las ecMm en secuencia.

1.  $\epsilon_{gen} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , pero si  $\epsilon_{gen} \neq 0$  (que es el caso que vamos a considerar en todo lo sucesivo) entonces se tiene  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Lo aplicamos al campo de onda plana de la sección anterior y obtenemos

$$\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

2. La siguiente ecuación es lo mismo que decir  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , y por lo tanto,

$$\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{H}_0 = 0$$

3. Un rotacional da

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0$$

4. Y el otro:

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{\epsilon_{gen}\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{H}_0$$

Ahora sólo tenemos que leer las ecuaciones. Esta va a ser la estrategia para afrontar todos los problemas de propagación del curso. Combinando las (3) y (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\frac{1}{\epsilon_{gen}\omega} \mathbf{k}_c \wedge \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0 \\ &= -\frac{1}{\mu\epsilon_{gen}\omega^2} (\mathbf{k}_c \wedge \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0) \\ &= -\frac{1}{\mu\epsilon_{gen}\omega^2} [\mathbf{k}_c (\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{k}_c)] \\ &= \frac{1}{\mu\epsilon_{gen}\omega^2} \mathbf{E}_0 \mathbf{k}_c^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{k}_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{gen} = \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$$

esto se utiliza más habitualmente en la forma

$$n_c^2 = c^2 \mu \epsilon_{gen} = \frac{\mu \epsilon_{gen}}{\mu_0 \epsilon_0}$$

este parámetro es el índice de refracción complejo. Cuando la constante dieléctrica sea compleja (medios absorbentes) el índice de refracción será complejo. Lo mismo ocurrirá al vector de onda, y ésta es la razón por la que hemos venido usando el subíndice  $c$ .

Descomponemos el vector de onda y el índice de refracción en

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_c &= \mathbf{k} + i\mathbf{a} \\ n_c &= n + i\kappa \end{aligned}$$

con  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $n$ ,  $\kappa$  cantidades reales, que reciben los nombres respectivos de vector de ondas, vector de atenuación, índice de refracción e índice de absorción. Entonces la expresión de la oap es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

La constante  $\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}$  disminuye con la propagación, y tanto más cuanto mayor es el vector de atenuación  $\mathbf{a}$ . Las partes imaginarias del vector de onda y del índice de refracción vienen de las pérdidas por fricción en el proceso de absorción-reemisión.

De la relación

$$\mathbf{k}_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$$

se pasa fácilmente (raíz cuadrada compleja) a

$$\mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2)$$
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa$$

que forman las condiciones que buscábamos.

### Dos comentarios importantes (mucho cuidado)

- No deberíamos llamar ondas planas a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

porque no lo son (en general  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{a}$  no son paralelos y por lo tanto,  $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t)$ ). Deberíamos llamarlas ondas planas inhomogéneas: los planos de amplitud constante no coinciden con los planos de fase constante. Por lo tanto, cuando las llamemos oap, estamos abusando del lenguaje (y lo haremos).

- A partir de la estructura de la onda que hemos encontrado al principio del capítulo, es tentador pensar que  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{k}_c)$  forman un triedro ortogonal. No es así, ya que intervienen vectores complejos (v. ejercicio 18).

---

4.2: Solución is shared under a [CC BY-SA 1.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.