

3.3.2: Promedios para llegar a las ecMm

Esperamos que el problema de las ecMm sobre un continuo sea más sencillo que el problema de las ecM sobre cargas discretas.

Como las derivadas $\frac{\partial}{\partial x}$ de las ecuaciones de MAXWELL son respecto a x y la integral es respecto a \mathbf{r}' se puede escribir

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_{mic} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial x}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{mic} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t}$$

Tomamos promedios a ambos lados de las ecM:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic} \rangle &= \langle \rho \rangle \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{B}_{mic} \rangle &= \langle 0 \rangle \\ \left\langle \nabla \wedge \mathbf{E}_{mic} + \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}}{\partial t} \right\rangle &= \langle 0 \rangle \\ \left\langle \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mic} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle &= \langle \mathbf{j} \rangle \end{aligned}$$

Se convierten en

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mac} &= \langle \rho \rangle \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{mac} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E}_{mac} + \frac{\partial \mathbf{B}_{mac}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j} \rangle \end{aligned}$$

la segunda y tercera ecuaciones están ya en el formato que buscamos, mientras que las otras necesitan de algunos arreglos, para los que nos valdremos de los siguientes resultados del electromagnetismo

1. $\langle \rho \rangle = \langle \rho_{lib} \rangle + \langle \rho_{lig} \rangle$, donde $\langle \rho_{lig} \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. El vector

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \mathbf{r}_j \quad (3.3.2.1)$$

recibe el nombre de vector polarización (nada que ver con la polarización de una onda) y corresponde al momento dipolar por unidad de volumen.

2. $\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}_{lig} \rangle + \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle$, donde $\langle \mathbf{j}_{lig} \rangle = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M}$. El vector

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{1}{2} q_j \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{r}_j$$

se llama vector magnetización, y corresponde a la magnetización por unidad de volumen.

Así las cosas las dos ecuaciones de MAXWELL que dependen de la materia quedan

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mac} &= \langle \rho_{lib} \rangle - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \nabla \wedge \mathbf{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M} \end{aligned}$$

Por concisión prescindiremos en lo que sigue de los subíndices mac; usaremos $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_{mac}$ y $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_{mac}$. Definiendo unos nuevos vectores (llamados, respectivamente, vector desplazamiento eléctrico y vector campo magnético)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{aligned}$$

se reescriben las dos ecuaciones en cuestión

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \langle \rho_{lib} \rangle \\ \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle\end{aligned}$$

Las ecMm son ecuaciones en las que aparecen cuatro campos. Y eso es porque dos de ellos tienen en cuenta la materia, las $\sim 10^{28}$ partículas por metro cúbico: \mathbf{P} y \mathbf{M} . Estas son las ecuaciones de MAXWELL macroscópicas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \langle \rho_{lib} \rangle \quad (3.3.2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.2.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.3.2.4)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle \quad (3.3.2.5)$$

Las ecMm son las ecM de partida, pero con las densidades de carga y de corriente ligadas incluidas en los campos del lado izquierdo. Los resultados de la propagación en el vacío se pueden trasponer con ciertas precauciones, y resulta para la energía transportada por la onda

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

y el promedio temporal para ondas armónicas

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \}$$

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = 0$$

3.3.2: Promedios para llegar a las ecMm is shared under a [CC BY-SA 1.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license and was authored, remixed, and/or curated by Alvaro Tejero Cantero.