

1.2.4: Ondas armónicas planas

Si tanto la dependencia armónica temporal como la dependencia espacial en forma de onda plana son impuestas a la ecuación de ondas vectorial 1.6 las ondas armónicas planas se ven obligadas a adoptar esta expresión:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

Toda la dependencia espaciotemporal está en la exponencial compleja; tanto \mathbf{E}_0 como \mathbf{B}_0 son vectores complejos constantes. Cualquier onda se puede desarrollar como superposición de ondas armónicas planas.

Pero las soluciones no deben ser sólo de la ecuación de ondas, deben cumplir también las ecuaciones de Maxwell. Eso introduce ligaduras entre las constantes preexponenciales.

Si se impone el cumplimiento de las ecuaciones de Maxwell se desemboca en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0\end{aligned}$$

a partir de las dos divergencias nulas (ecuaciones (1.1.1) y (1.1.2)) en el vacío). Y, si hacemos los dos rotacionales (1.1.3) y (1.1.4) obtenemos además

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_0 &= -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0\end{aligned}$$

De estas condiciones se extraen cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}\end{aligned}$$

que permiten obtener importantes conclusiones sobre la estructura de la onda: los campos son ortogonales entre sí, y cada uno de ellos al vector de ondas. Se forma pues un triedro directo¹ $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$. Si combinamos las dos últimas ecuaciones y se usa²

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

se obtiene

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}|^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ k &= \frac{\omega}{c} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

la última ecuación constituye la definición de λ , la longitud de onda. La condición

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\nu}{c} &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda\nu &= c\end{aligned}$$

permite clasificar las ondas también por su longitud de onda, puesto que conocemos la relación con la frecuencia. Lo que llamamos luz cumple aproximadamente

$$400nm < \lambda < 750nm$$

? Exercise 1.2.4.1

¿Cómo son los frentes de onda de una onda armónica plana?

Answer

En primer lugar hay que identificar su fase: es $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$. Los frentes de onda vendrán dados por

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = cte \quad (1.2.4.1)$$

podemos escoger el vector de ondas particular $\mathbf{k} = k_z \mathbf{y}$ entonces

$$kz - \omega t = cte \quad (1.2.4.2)$$

Para ver que estos planos perpendiculares al eje z se desplazan con el tiempo podemos despejar la coordenada

$$z = \frac{\omega}{k}t + \frac{cte}{k} = ct + \frac{cte}{k} \quad (1.2.4.3)$$

los planos de la misma fase se mueven con velocidad c : la velocidad de fase es c .

-
1. en el sentido de que $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ esta en la dirección de \mathbf{k}
 2. Esta magia puede ser recordada como la regla "bac - cab" para el triple producto vectorial.
-

1.2.4: Ondres armónicas planas is shared under a [CC BY-SA 1.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license and was authored, remixed, and/or curated by Alvaro Tejero Cantero.