

7.4: Propagación de ondas armónicas planas

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

con $\mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0 \in \mathcal{C}$ constantes y $\omega, \mathbf{k} \in \mathfrak{R}$ constantes (medios transparentes). Nuestro problema es determinar las relaciones que existen entre estos parámetros (por ejemplo, relación entre vector de ondas y frecuencia, o entre vector de ondas y vectores de intensidad de campo...).

Como siempre, acudimos a las ecMm y el resultado es

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 &= \mu\omega\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 &= -\omega\mathbf{D}_0\end{aligned}$$

Es decir, $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ son mutuamente perpendiculares entre sí. Además, $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, pero eso no quiere decir $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, que en general será falso. Esto implica que la energía no irá en la misma dirección que la fase. De modo que

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

no lleva la misma dirección que el vector de ondas. En lo que sigue estudiaremos siempre la propagación de la fase, porque luego a partir de \mathbf{E}, \mathbf{H} se obtiene de modo sencillo la propagación de la energía.

Si reescribimos el segundo rotacional y después sustituimos el valor de \mathbf{H}_0 que nos da el primero

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_0 &= \hat{\epsilon} \mathbf{E}_0 \\ &= -\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 \\ &= -\frac{1}{\mu\omega^2} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0)\end{aligned}$$

ejecutando el doble producto vectorial

$$\mathbf{D}_0 = -\frac{1}{\mu\omega^2} (\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{k}^2))$$

finalmente el resultado de combinar los dos rotacionales es

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \mathbf{E}_0 + \mu\omega^2 \hat{\epsilon} \mathbf{E}_0 = 0$$

ésto es un conjunto de 3 ecuaciones, que queremos resolver para \mathbf{k} y para \mathbf{E} . Como son lineales en \mathbf{E}_0 , las podemos reescribir con ayuda de una matriz, $M(\mathbf{k}, \hat{\epsilon})$:

$$M(\mathbf{k}, \hat{\epsilon}) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$$

para escribir la matriz en la forma más sencilla posible hay que utilizar como ejes coordenados los ejes principales x, y, z . Entonces M es:

$$\begin{pmatrix} \left(n_x \frac{\omega}{c}\right)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \left(n_y \frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \left(n_z \frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \quad (7.4.1)$$

El \mathbf{E}_0 debe ser autovector de la matriz con autovalor nulo. Se debe producir que $|M| = 0$, lo que limitará los vectores de onda posibles.

El proceso será obtener dichos vectores de onda y luego llevarlos a la ecuación de autovalores para despejar \mathbf{E}_0 . Eso equivale a la resolución completa del problema que nos habíamos fijado: determinar la propagación de oap en medios anisótropos.

7.4: Propagación de ondas armónicas planas is shared under a [CC BY-SA 1.0](#) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.