

10.5.1: Abertura circular

La abertura será iluminada por una onda plana. Trabajaremos en aproximación de FRAUNHOFER. Al enfrentar cualquier problema de este tipo tenemos que especificar

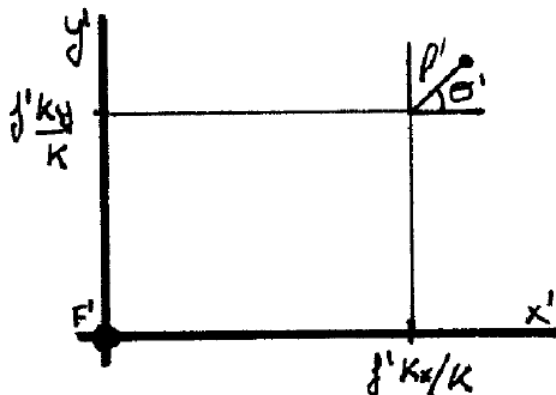


Figura 10.5.1.1: Coordenadas polares ρ', θ' en el plano focal imagen. El origen está desplazado $f' \frac{k_y}{k}$ en el eje y y $f' \frac{k_x}{k}$ en el eje x .

1. Cómo es la abertura (función $t(\xi, \eta)$). En este caso $t(P) = 1 \forall P \in \Sigma$ y $t(P) = 0 \forall P \notin \Sigma$.
2. Cómo es la iluminación (función $u(\xi, \eta)$). En este caso es una onda plana

$$u(\xi, \eta) = u_0 e^{i(k_x \xi + k_y \eta)}$$

con u_0 constante (evaluado en $z = 0$).

Este caso tan sencillo ilustrará el fenómeno de la difracción. Queremos saber cómo será la onda en el plano focal imagen. Recordemos que hemos tirado a la basura el factor temporal $e^{i\omega t}$, suponiendo tácitamente que está en todas partes pero ahorrándonos escribirlo.

Para resolver el problema sólo queda abordar la integral encontrando un buen sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \theta \\ \eta &= \rho \sin \theta\end{aligned}$$

También tomaremos polares (con respecto a un punto que no es el origen) en el plano focal imagen (ver figura 10.9)

$$\begin{aligned}x' &= f' \frac{k_x}{k} + \rho' \cos \theta' \\ y' &= f' \frac{k_y}{k} + \rho' \sin \theta'\end{aligned}$$

Tenemos dos exponenciales complejas (la de la iluminación y la del núcleo integral) que se pueden fundir como sigue

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_{\Sigma} u_0 e^{i\left((k_x - \frac{x'}{f'})\xi + (k_y - \frac{y'}{f'})\eta\right)} d\xi d\eta \quad (10.5.1.1)$$

Copy and Paste
Image here.
Delete this
placeholder image

Figure 10.5.1.2: $\frac{I(\rho')}{I(0)}$ en función de $\frac{kR}{f'} \rho'$

la forma del exponente explica la elección de coordenadas para el plano focal imagen

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u_0 e^{-i \frac{k}{f'} \rho \rho' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta')} \quad (10.5.1.2)$$

el paréntesis es igual a $\cos(\theta - \theta')$, así que

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u_0 e^{-i \frac{k}{f'} \rho \rho' (\cos(\theta - \theta'))} \quad (10.5.1.3)$$

esta integral no va a depender de θ' porque da lo mismo qué límites tenga la integral mientras abarque una circunferencia.

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u_0 e^{-i \frac{k}{f'} \rho \rho' \cos \theta} \quad (10.5.1.4)$$

La onda va a depender sólo de la variable ρ' . Estas integrales necesitan para su resolución de las funciones de BESSEL.

$$\hat{u}(\rho') \propto 2\pi \int_0^R \rho d\rho J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{f'}\right) \quad (10.5.1.5)$$

para llegar a la forma final tenemos aún que incluir otra función de BESSEL:

$$\hat{u}(\rho') \propto \frac{f'}{k\rho'} R J_1\left(\frac{kR\rho'}{f'}\right) \quad (10.5.1.6)$$

Normalmente estaremos más interesados en intensidades que en campos,

$$\begin{aligned} I(\rho') &\propto |\hat{u}(\rho')|^2 I(\rho') \\ &= I_0 \left(\frac{2J_1\left(\frac{kR}{f'}\rho'\right)}{\frac{kR}{f'}\rho'} \right)^2 \end{aligned}$$

donde I_0 contiene todas las constantes que han ido apareciendo y algunas más que son necesarias.

La magnitud de los máximos decae en picado, por lo que basta con considerar el principal y, como mucho, los dos secundarios. La imagen en el plano focal se muestra en la figura. Centrado en el punto 0 de las polares especiales veríamos un círculo intenso y una serie de anillos concéntricos progresivamente más tenues en torno a él. 10 Difracción

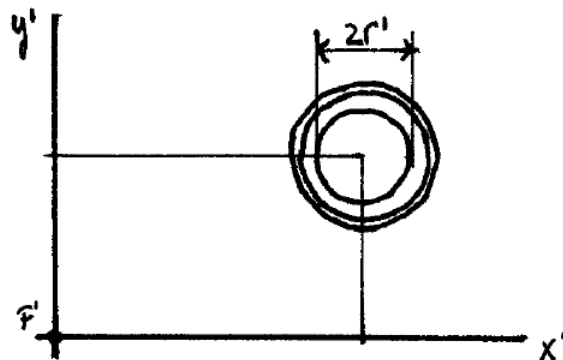


Figura 10.5.1.3: Aspecto en el plano focal imagen.

Interpretación

1. La distribución de intensidad que aparece en el plano focal imagen es lo que llamamos difracción, puesto que lo que se vería, de ser válida la OG^1 , sería un punto allí donde realmente vemos una mancha rodeada por anillos. Dicho de otro modo, después de la abertura la OE nos dice que *no tenemos una onda plana*², pues de ser así obtendríamos una imagen puntual.
2. El tamaño de la mancha central se puede calcular obteniendo el radio del máximo central (que concentra el 84% de la luz). El radio del primer cero de la función de la figura es

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{R}{f'} r' = 1.220\pi$$

$$r' = 1.22 \frac{\lambda}{2R} f'$$

- a) La dependencia con f' es irrelevante (cuanto más lejos esté el plano, proporcionalmente más grande se proyecta la mancha).
- b) En cuanto a R , la mancha central es inversamente proporcional en tamaño a la abertura de la fuente (tampoco el R puede ser demasiado pequeño si queremos conservar la validez del principio de HUYGENS-FRESNEL). En la vida ordinaria no vemos los efectos de la difracción ⁶ porque la luz raramente encuentra aberturas lo suficientemente pequeñas.
- c) La mancha crece linealmente en tamaño con la longitud de onda. Si iluminamos con luz blanca, cada componente monocromática da lugar a una figura de difracción. La distribución de intensidad sería coloreada, porque las figuras de diversas λ no coinciden entre sí. Algunos textos plantean la óptica geométrica como el límite en que $\lambda \rightarrow 0$ (cuando λ es tan pequeña que permite descartar la difracción para un orden de magnitud dado de tamaño de rendija).

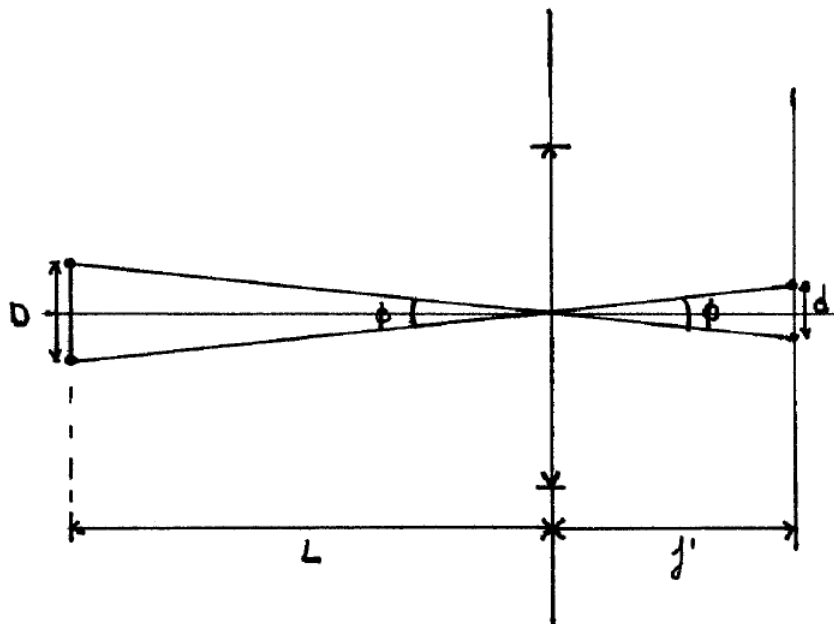


Figure 10.5.1.3:

Llamaremos D la distancia mutua de los objetos puntuales, L a su distancia al instrumento, f' a la focal del sistema y d a la distancia entre las dos imágenes formadas.

Copy and Paste
Image here.
Delete this
placeholder image

Figure 10.5.1.4: Puntos resueltos y no resueltos. Situación intermedia.

✓ Ejemplo 10.5.1.1

Para una onda monocromática de $\lambda = 500nm$ ¿cuál es el tamaño de la mancha central de difracción causada por una abertura circular de $R = 1\text{ mm}$ tras pasar por una lente de $f' = 10\text{ cm}$?

Solution

La solución es $R = 20\mu m$. Se trata de un efecto relativamente pequeño.

1. según la cual una abertura iluminada por un haz de rayos paralelos produce una imagen puntual tras pasar por la lente convergente.
 2. tal vez sea una colección de ondas planas, pero no una única.
 3. Las pequeñas manchas coloreadas que vemos al mirar al cielo en los alrededores del sol podrían estar causadas por la difracción de su luz en motas de polvo de las pestañas.
- 10.5 Círculos.

10.5.1: Abertura circular is shared under a [CC BY-SA 1.0](#) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.