

1.5.2: Promedio temporal del vector de Poynting

Si partimos de la expresión para ondas armónicas planas:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_R) \mathbf{k}$$

y representamos \mathbf{S} para la luz visible veremos una función oscilante de frecuencia $\simeq 10^{14}$ Hz, con un período tan breve que prácticamente ningún detector tiene resolución temporal para notar las oscilaciones. Si ponemos un detector y enchufamos un osciloscopio al detector sólo veremos promedios temporales (figura 1.7). Se requiere una magnitud que tenga en cuenta nuestra incapacidad de seguir las variaciones rápidas del vector de Poynting "instantáneo", $\mathbf{S}(t)$. Entonces ¹

$$\langle \mathbf{S} \rangle(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t') dt'$$

donde Δt representa el intervalo sobre el que se promedia. Afortunadamente para las frecuencias que nos interesan el promedio temporal de energía no depende del tiempo de respuesta ², Δt . No hay más que hacer la integral, siempre recordando usar la representación real puesto que hay un producto de campos.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}) \\ \mathbf{B}_R &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

llevamos esto a la expresión general para \mathbf{S} , $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, puesto que la onda no tiene por qué ser plana.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0) \\ &\quad + \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0 e^{-i2\omega t} + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0^* e^{i2\omega t}) \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0 + \dots) \end{aligned}$$

nos quedan cuatro integrales. Para el primer paréntesis no hay problema:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0 + \dots)$$

pero en los puntos suspensivos tenemos las integrales

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{\pm i2\omega t'} = \frac{1}{i2\omega \Delta t} (e^{\pm i2\omega(t+\Delta t)} - e^{\pm i2\omega t})$$

en el rango óptico y con los detectores que utilizamos, Δt nunca es suficientemente pequeño como para que estas integrales sean relevantes: el denominador vale como mínimo 10^5 ya que $\omega \Delta t \simeq 10^{14} \Delta t \simeq 10^5$ con un $\Delta t \simeq 10^{-9}$ s, que es razonable. Así:

$$\langle \mathbf{S} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \}$$

para una onda armónica. Lo bueno de esta fórmula es que está escrita de modo que se puede sustituir la representación compleja. Es importante recalcar que esto sólo vale para ondas armónicas. Para otro tipo de ondas no somos capaces de dar una expresión explícita.

? Exercise 1.5.2.1

Particularizar la expresión hallada para la onda armónica plana

Answer

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \wedge \mathbf{B}_0^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\}$$

se desemboca en la siguiente expresión

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k$$

donde $|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*$.

1. Habitualmente se utilizan los paréntesis angulares para denotar "promedio sobre las configuraciones posibles" y la barra superior para el promedio temporal. Éste no es el caso aquí.

2. Para hacerse una idea, un tiempo de respuesta muy bueno, correspondiente a un detector muy rápido, sería del orden del nanosegundo, $\Delta t \simeq 10^{-9}$ s.

1.5.2: Promedio temporal del vector de Poynting is shared under a [CC BY-SA 1.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license and was authored, remixed, and/or curated by Alvaro Tejero Cantero.