

3.3.3: EcmM para ondas armónicas

La materia se puede polarizar de muchos modos, pero nosotros sólo estamos interesados en las \mathbf{P} y \mathbf{M} causadas en el material por los campos electromagnéticos que constituyen las oem que se propagan en el medio. De modo que los \mathbf{r}_j de la definición de \mathbf{P} son las separaciones entre carga positiva y negativa inducidas por los campos incidentes. A partir de ahora sólo utilizaremos ondas armónicas como agentes de perturbación:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

y por lo dicho antes del único mecanismo de polarización que nos interesa, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ En virtud de los razonamientos sobre la separación entre cargas cuando incide un campo (aproximación lineal)² y a partir de los resultados fenomenológicos se puede escribir que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \chi_e(\mathbf{r}, \omega)\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \chi_m(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

donde χ_e, χ_m son, respectivamente la susceptibilidad eléctrica y la susceptibilidad magnética del material. Aprovechando esto podemos plantear una relación similar para la densidad de corriente, ya que

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \dot{\mathbf{r}}_j$$

y la velocidad para una onda armónica es proporcional a $\omega\mathbf{E}$, con lo que

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Donde σ se llama conductividad. Estas aproximaciones lineales serán suficientes para el trabajo que vamos a hacer.

Finalmente:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}\end{aligned}$$

y podemos definir ϵ la constante dieléctrica del material y μ , su permeabilidad magnética de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}$$

En general ocurrirá que

$$\chi_e, \chi_m, \sigma, \epsilon, \mu$$

serán funciones con valores complejos del punto \mathbf{r} y también de la frecuencia ω . Además, si la fuerza recuperadora no fuera isotrópica, todas estas funciones podrían ser tensores.

Conclusiones

Sólo necesitamos dos campos, \mathbf{E}, \mathbf{H} . Para lo demás tendremos la información sobre el material condensada en los tensores χ_e, χ_m y σ , si logramos expresar la densidad de carga libre en función de alguno de ellos, lo que haremos por medio de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t})$$

debido a que las ondas son armónicas podemos integrar para obtener

$$\langle \rho_{lib} \rangle = \nabla \cdot \left(-\frac{i}{\omega} \sigma \mathbf{E} \right)$$

Ecuaciones de Maxwell macroscópicas para ondas monocromáticas

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) &= 0 \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r})) &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - i\omega\mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + i\omega\epsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0\end{aligned}$$

donde podemos llamar constante dieléctrica generalizada (que contiene el efecto de las cargas ligadas y también el de las cargas libres a la cantidad

$$\epsilon_{gen} = \epsilon + \frac{i}{\omega} \sigma$$

Hemos reducido el problema de describir la materia al de especificar dos funciones, ϵ_{gen} y μ , que pueden ser complicadas. Nuestro trabajo es ahora el de dadas estas dos funciones resolver las ecuaciones para diversos medios, pues sus soluciones caracterizan completamente la propagación de la radiación en los medios ópticamente densos.

1. Para justificar esta expresión conviene utilizar la ecuación 2.3 en la definición de \mathbf{P} (ecuación 3.1).

3.3.3: EcmM para ondas armónicas is shared under a CC BY-SA 1.0 license and was authored, remixed, and/or curated by Alvaro Tejero Cantero.