

## 2.2.2: Solución para la carga ligada

Resolveremos la ecuación de movimiento para un caso particular de onda incidente muy significativo, que es el que nos interesará en el resto del curso: la onda armónica plana

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}$$

no hay más que utilizar estos campos en la expresión de la ecuación 1.1.5. La ecuación resultante es muy complicada,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}) - m\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma m\dot{\mathbf{r}}$$

de modo que vamos a introducir dos aproximaciones:

1. Para una oap sabemos que

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_0|$$

si esto se lleva a la ecuación

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B})$$

el segundo término va en  $\frac{v}{c}$ . Así, podemos aproximar la fuerza sólo por la fuerza eléctrica,  $\mathbf{F} \simeq q\mathbf{E}$ , lo que es como suponer que  $v \ll c$ . Si el campo em fuera suficientemente fuerte (por ejemplo, el debido a un laser) esto no sería cierto. En todo caso, dejamos pendiente de comprobación la sensatez de la hipótesis. La ecuación queda

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} - m\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma m\dot{\mathbf{r}}$$

$$= q\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - m\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma m\dot{\mathbf{r}}$$

2. La ecuación 2.1 es no lineal en la medida en que la incógnita  $\mathbf{r}$  aparece en un exponente. Admitiremos que en la solución la separación entre cargas positivas y negativas cumple:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \ll \lambda$$

El tamaño típico de los átomos es del orden del nm, y  $\mathbf{r}(t)$  cabe esperar que será como máximo el tamaño del átomo. La longitud de onda del visible es del orden de 500 veces mayor. Así,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) \simeq \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(0) = cte$$

Entonces podemos incluir este factor constante en la amplitud  $\mathbf{E}_0$ . Con ello queda la siguiente expresión para la fuerza de LORENTZ

$$\mathbf{F} \simeq q\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

La ecuación que tenemos que resolver se reduce una vez admitidas ambas hipótesis a:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

que es la ecuación de un oscilador armónico amortiguado y forzado. La teoría de edos nos aporta

$$\mathbf{r}_{gi} = \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{r}_{gh} \quad (2.2.2.1)$$

La solución general de la homogénea ( $\mathbf{r}_{gh}$ ) la tomamos con  $\mathbf{E}_0 = 0$ , ya que dependerá de algo parecido a  $e^{-\gamma t}$ . Siendo  $\gamma$  tan grande ( $\simeq 10^8 s^{-1}$ ) el tiempo del transitorio que es la solución de la homogénea es del orden del 10ns. Aquí no nos interesaremos por esos transitorios rápidos. Nos quedaremos pues con una solución particular de la inhomogénea ( $\mathbf{r}_{pi}$ ), que dependerá del campo eléctrico.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$$

$\mathbf{r}_0$  se obtiene insertando esta solución en la ecuación 2.2. Se calculan las derivadas  $\dot{\mathbf{r}} = -i\omega \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$  y  $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$  y la ecuación queda

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

despejando, la amplitud y la ecuación de la trayectoria de la carga ligada resultan ser

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.2.2.2)$$

En el caso de un átomo  $m$  y  $q$  son la masa y la carga del electrón, respectivamente.

### Comentarios a la ecuación de la trayectoria 2.3

1. El desplazamiento de las cargas es lineal en el campo.
2. La constante de proporcionalidad es compleja, lo que deriva del hecho de que hay pérdidas (profundizaremos en esto más adelante).
3. La constante de proporcionalidad depende de la frecuencia de forzamiento. Sabemos que si la frecuencia de forzamiento es muy próxima a la de resonancia, la respuesta será muy fuerte.

### Cumplimiento de las hipótesis

En cuanto al cumplimiento de las hipótesis que nos han conducido a 2.3, se darán dos situaciones:

- $\omega \neq \omega_0$  (aproximación muy buena) y
- $\omega = \omega_0$  (resonancia). En este segundo caso la aproximación de estos cálculos clásicos es peor, aunque suficiente. Para este caso se podría pasar al modelo cuántico de la materia.

#### ✓ Example 2.2.2.1

verificar numéricamente estas dos afirmaciones sobre las aproximaciones.

#### ? Exercise 2.2.2.1

Evaluar el cumplimiento de las hipótesis  $\dot{\mathbf{r}} \ll c$  y  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \ll \lambda$  para luz solar y electrones como carga ligada.

#### Answer

Para la luz solar

$$|\mathbf{E}_0|_{\text{solar}} \simeq 10^3 \frac{V}{m} \quad (2.2.2.3)$$

una frecuencia típica del visible es

$$\omega \simeq 3 \times 10^{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (2.2.2.4)$$

utilizamos el valor de  $\gamma \simeq 10^8 \text{ s}^{-1}$  y los datos de carga y masa del electrón. Puesta en forma real, la solución para una carga libre es una oscilación de amplitud

$$|\mathbf{r}_0| \simeq 2 \times 10^{-17} \text{ m} = 2 \times 10^{-8} \text{ nm} \quad (2.2.2.5)$$

y longitud de onda  $\lambda \simeq 600 \text{ nm}$ . Vemos que la diferencia de orden de magnitud entre el tamaño del átomo ( $\simeq$  separación de las cargas) y la longitud de onda incidente justifica la primera aproximación tomada

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \leq 2 \times 10^{-8} \text{ nm} \ll \lambda = 600 \text{ nm} \quad (2.2.2.6)$$

En cuanto a la velocidad máxima, es del orden de

$$|\mathbf{r}_0| \omega \simeq 6 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.2.2.7)$$

lo cual queda muy lejos de la velocidad de la luz, lo que justifica (son 10 órdenes de magnitud...) el haber despreciado el efecto del campo magnético.

2.2.2: Solución para la carga ligada is shared under a [CC BY-SA 1.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license and was authored, remixed, and/or curated by Alvaro Tejero Cantero.