

10.4.2: Aproximación de FRAUNHOFER

Fundamento; Importancia práctica

La idea de FRAUNHOFER es desarrollar el exponente así

$$\frac{k}{2z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2) = \frac{k}{2z}(x^2 + \xi^2 - 2\xi x + y^2 + \eta^2 - 2\eta y)$$

Es fácil librarse de x^2 y de y^2 , pues no hay que integrar sobre ellos. Más difícil es librarse de ξ^2 y η^2 , y la aproximación de FF consiste precisamente en decir que su contribución a la integral es pequeña. Dicho de otro modo

$$\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2) \ll 1$$

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda}(\xi^2 + \eta^2)$$

Básicamente esta aproximación consiste en observar desde un poco más lejos. Obtenemos así la fórmula de FRAUNHOFER:

$$\hat{u}(P_0) = \frac{e^{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \int t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{-i\frac{k}{z}(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$$

✓ Ejemplo 10.4.2.1

¿Cuán lejos hay que irse si la abertura es de 1mm , con luz visible para que valga la aproximación?

Solution

$\xi^2 + \eta^2 \sim 10^{-6}\text{m}^2$ y $\lambda \sim 5 \times 10^{-7}\text{m}$ implica que $z \gg 10\text{m}$. Hay que alejarse bastante; teniendo en cuenta que la energía emitida por un punto se reparte por la superficie de una esfera (que crece con el radio al cuadrado), puede que a esa distancia haya difracción pero no podamos verla.

Hay una forma de satisfacer la condición de FF sin alejarse de la abertura. Consiste en irse al infinito utilizando una lente delgada convergente. Al poner en el camino de la luz una lente de este tipo, la luz que iría a parar a un P_0 en el infinito va a concurrir, de hecho, sobre un punto cercano en el plano focal imagen de la lente. Ubicaremos la lente, por sencillez, paralela al plano que contiene la abertura.

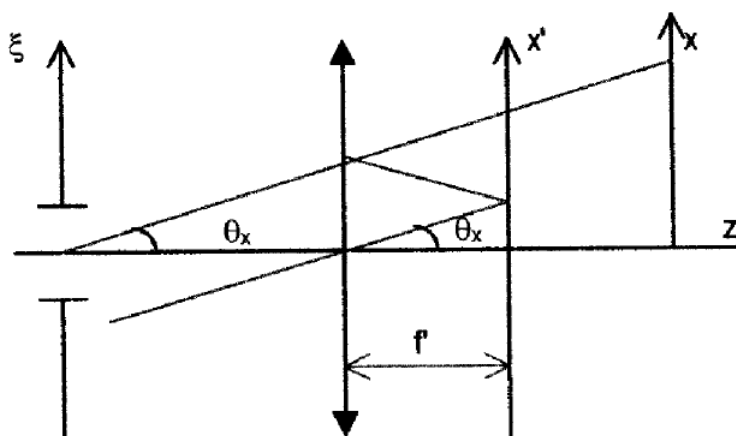


Figura 10.4.2.1: Nuevo sistema de coordenadas.

Debemos modificar ligeramente la fórmula, pues las coordenadas de P_0 cambiarán al moverse de un punto muy lejano al plano focal imagen. Ahora a las coordenadas sobre ese plano las llamaremos x', y' . Su relación con las anteriores se calcula con un poco

de trigonometría

$$\begin{aligned}\tan \theta_x &= \frac{x}{z} \\ &= \frac{x'}{f'}\end{aligned}$$

de donde $x' = \frac{x}{z} f'$ e $y' = \frac{y}{z} f'$.

Omitiendo la constante de proporcionalidad fuera de la integral, la integral que manejaremos será:

$$\hat{u}(x', y') \propto \int t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{-i \frac{k}{f'} (x' \xi + y' \eta)} d\xi d\eta$$

ya sólo tenemos que aplicar la fórmula (válida en aproximación de FF y usando una lente delgada convergente).

Principio de Babinet en aproximación de FF con iluminación por ondas planas

El principio de BABINET determina cómo se relacionan figuras de difracción producidas por aberturas complementarias.

$$\begin{aligned}\hat{u}(P_0) + \hat{u}'(P_0) &= u(P_0) \\ \text{o.dif.abert} + \text{o.dif.obj} &= \text{o.incidente}\end{aligned}$$

Vamos a ver cómo se escribe esta expresión cuando la onda que ilumina la abertura es plana y estamos trabajando en las condiciones de la aproximación de FRAUNHOFER.

Una onda plana al atravesar una lente converge a un punto del plano focal imagen, que en la figura 10.7 se ha etiquetado como P_k . Por lo tanto, en aproximación de FRAUNHOFER

$$u(P_0) = 0 \quad (10.4.2.1)$$

Copy and Paste
Image here.
Delete this
placeholder image

Figure 10.4.2.2: P_0 está en el plano focal imagen de una lente convergente.

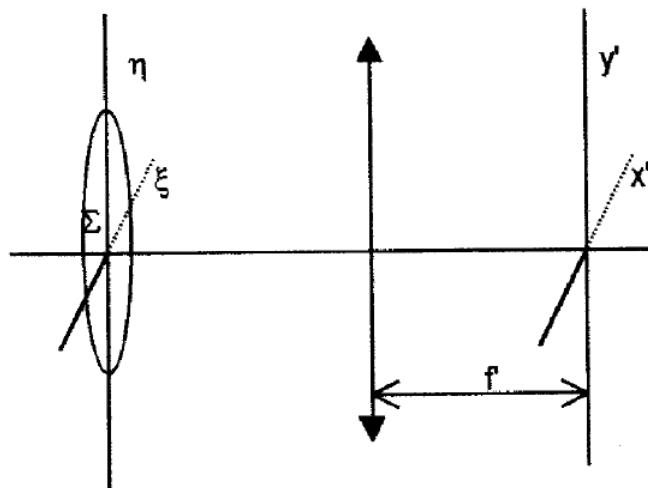


Figura 10.4.2.3: Planteamiento geométrico del problema. Plano del orificio $z = 0$, radio de la abertura R .
en cualquier $P_0 \neq P_k$. El ppo de BABINET se escribe entonces $\forall P_0 \neq P_k$ como

$$\hat{u}(P_0) + \hat{u}'(P_0) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned}\hat{u}(P_0) &= -\hat{u}'(P_0) \\ I'(P_0) &= I(P_0)\end{aligned}$$

Es decir, que para dos aberturas complementarias

1. en régimen FRAUNHOFER
2. iluminadas por ondas planas

las figuras de difracción son iguales salvo en un punto.

10.4.2: Aproximación de FRAUNHOFER is shared under a [CC BY-SA 1.0](#) license and was authored, remixed, and/or curated by LibreTexts.