

5.2.4: Ley de SNELL

Aplicación de las condiciones de frontera

En $z = 0$ el campo a la izquierda es el incidente más el reflejado y el campo a la derecha exclusivamente el transmitido

$$\begin{aligned}E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx} \\E_{iy} + E_{ry} &= E_{ty} \\H_{ix} + H_{rx} &= H_{tx} \\H_{iy} + H_{ry} &= H_{ty}\end{aligned}\tag{5.2.4.1}$$

En la interfase $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ tenemos pues 4 ecuaciones de la forma ² :

$$()e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + ()e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} + \dots = ()e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots$$

Las cuatro ecuaciones responden a este esquema de dependencia en el espacio y el tiempo con valores en los paréntesis que son función de las amplitudes \mathbf{A} , \mathbf{R} , \mathbf{T} y los vectores de onda \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \dots , \mathbf{k}'' , \dots .

Podemos extraer mucha información acerca de la solución sólo analizando la forma de las ecuaciones que hemos escrito.

Obsérvese que las exponenciales complejas son funciones linealmente independientes. O todo lo que está entre paréntesis es nulo o los argumentos de las exponenciales son todos idénticos. Como lo primero en general no es cierto, sólo queda la posibilidad de que todas las frecuencias sean idénticas (la misma conclusión puede alcanzarse por análisis de FOURIER).

$$\omega = \omega' = \dots = \omega'' = \dots$$

Lo mismo debe poder decirse de la dependencia espacial. Como no hay dependencia en z y la función en x e y debe ser la misma se puede escribir

$$\begin{aligned}k_x x + k_y y &= k'_x x + k'_y y = \dots = k''_x x + k''_y y = \dots \\k_x &= k'_x = \dots = k''_x = \dots \\k_y &= k'_y = \dots = k''_y = \dots = 0\end{aligned}$$

en z no podemos decir nada porque no está. Esto se puede leer diciendo que la componente tangencial de \mathbf{k} es la misma para la onda incidente, para la onda transmitida y para la reflejada. En resumen:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega = \dots = \omega = \dots \\ \mathbf{k}_t &= \mathbf{k}'_t = \dots = \mathbf{k}''_t = \dots\end{aligned}$$

Observando la nulidad de la componente y de los vectores de onda podemos afirmar también que \mathbf{k}' , \dots , \mathbf{k}'' , \dots están en el plano de incidencia.

Como conocemos dos componentes del vector de ondas y también conocemos su módulo (por el cumplimiento de las ecMm), tenemos completamente determinado el vector de ondas de la onda transmitida. Y la solución es única. Fijada la onda incidente, sólo hay un \mathbf{k}' que verifique las condiciones que han de verificarse.

Si volvemos a las superposiciones de oap que hemos escrito para la onda transmitida y reflejada vemos que, teniendo misma fase, sólo hay una oap transmitida y una oap reflejada. Por lo tanto, podemos descartar todos los puntos suspensivos que hemos venido arrastrando hasta ahora y que representaban en principio una suma infinita de oap distintas.

Ley de Snell

Tenemos resuelto el problema de la existencia de las ondas reflejadas y transmitidas y de su dirección. Pero ésta se suele expresar de otro modo; Supongamos que el ángulo entre \mathbf{k}'' y \mathbf{u}_n es θ'' : sabemos que

$$\begin{aligned}k_x &= k''_x \\ n \frac{\omega}{c} \sin \theta &= n \frac{\omega}{c} \sin \theta''\end{aligned}$$

es decir $\theta = \theta''$, el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Para la onda transmitida

$$k_x = k'_x$$

$$n \frac{\omega}{c} \sin \theta = n' \frac{\omega}{c} \sin \theta'$$

de donde se obtiene la ley de SNELL

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'$$

Todavía nos queda resolver las condiciones de frontera. Pero podemos hacer ya algunos comentarios:

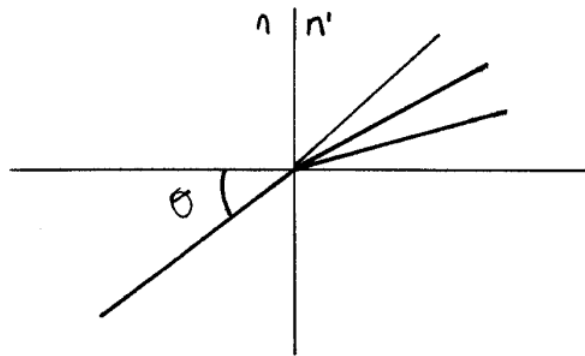


Figura 5.2.4.1: Dispersión de una onda con tres frecuencias $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

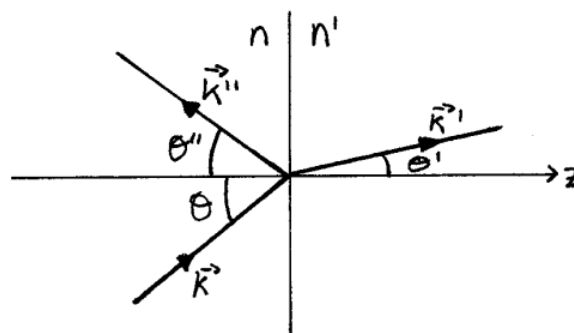


Figura 5.2.4.2: Los tres vectores de onda y sus ángulos respectivos con el vector normal \mathbf{u}_n .

- Desde el punto de vista microscópico lo que acabamos de encontrar es algo sorprendente: la luz generada por los átomos del medio es tan especial que anula la oap incidente y la sustituye por otra en distinta dirección.
- Una consecuencia de esto sobradamente conocida es que los índices de refracción se pueden medir simplemente cuantificando ángulos de refracción (mediante prismas, etc).
- Los índices de refracción en general dependen de la frecuencia. Tendremos tantas direcciones de propagación como frecuencias contenga el haz incidente. Esto puede servir a varios propósitos:
 - Hacer espectroscopía: averiguar qué frecuencias contiene una determinada onda.
 - Construir ondas monocromáticas a partir de ondas que no lo son. El medio separa espacialmente las frecuencias. El monocromador es un instrumento basado en esta idea: a partir de un haz no monocromático genera uno que contiene sólo un pequeño rango de frecuencias.

1. en adelante los puntos suspensivos representan los infinitos términos que no hemos escrito de la superposición de ondas planas que identificamos con la onda transmitida y la reflejada. por un razonamiento análogo, como también x e y son funciones linealmente independientes podemos igualar tranquilamente la dependencia en x y la dependencia en y